Løsningsforslag, lørdagsverksted 13. nov.

1. Rekken er alternerende, $\sum(-1)^{n+1}a_n$ med $a_n = (n-1)/n^2$. Vi sjekker at a_n er avtagende og at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Med

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \quad \text{er} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = -\frac{x-2}{x^3} < 0 \quad \text{for } x > 2.$$

Funksjonen $f(x)$ (for $x \geq 2$), og følgelig $a_n = f(n)$, er altså avtagende. Siden

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

er rekken $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konvergent ifølge alternerende rekkers test.

For å avgjøre om konvergensen er absolutt eller betinget må vi undersøke rekken $\sum a_n$. Vi kan bruke grensesammenligningstesten og sammenligner med rekken $\sum b_n = \sum 1/n$ (den harmoniske rekken):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)/n^2}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \quad (> 0).$$

Siden den harmoniske rekken er divergent, som p-rekke med $p = 1 (\leq 1)$, er $\sum a_n$ divergent. (Vi kunne også brukt integraltesten for å vise at $\sum a_n$ divergerer.) Rekken $\sum(-1)^{n+1}a_n$ er altså betinget konvergent.

Rekkens "neste ledd" er $(-1)^{11}a_{10} = -9/100$. Ifølge alternerende rekkers restleddestimat er da $S - S_9$ negativ og $|S - S_9| < a_{10}$. Vi har altså

$$-0{,}09 < S - S_9 < 0.$$

(2)

a)

(i) Undersøkelse av konvergens for

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Rekken er alternerende med $|a_n| > |a_{n+1}|$ og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ så rekken konvergerer.

Ser på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

og sammenligner med den divergente harmoniske rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/\sqrt{n}} = 1$$

så rekken konvergerer ikke absolutt ved grensesammenlig[ning]

Dette betyr at $\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+\sqrt{n}}}}$ konvergerer betinget.

(ii) Undersøkelse av konvergens for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$$

La
$$S_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+2)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)^n}{(2n+2)^n}$$

$$= \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Ser så på

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{1+1/n} \Big/ \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \underline{\frac{2}{e} < 1}$$

Ved forholdskriteriet konvergerer derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$$

absolutt.

b) Konvergensintervall for potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}$$

La $S = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\frac{1}{4})^{n+1} \frac{(x+4)^{n+1}}{2n+3}}{(\frac{1}{4})^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}} \right|$

$= \frac{1}{4} \cdot |x+4| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{2+3/n}$

$= \frac{1}{4} \cdot |x+4|$

Rekken konvergerer for $S < 1$, hvilket gir

$-1 < \frac{1}{4}(x+4) < 1$

$\Rightarrow$ $\underline{-8 < x < 0}$

Sjekk av endepunkter:

$\underline{x = -8:}$

$a_n = (-\frac{1}{4})^n \cdot \frac{(-4)^n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$

Sammenligner med den divergente harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n} = \frac{1}{2} > 0$

Ved grensesammenligningskriteriet divergerer rekken for $x = -8$

$\underline{x = 0:}$

$a_n = (-\frac{1}{4})^n \cdot \frac{4^n}{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$

Vi får altså en alternerende rekke der $|a_n| > |a_{n+1}|$ og $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, så rekken konvergerer.

Vi har altså at konvergensintervallet for

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\tfrac{1}{4}\right)^n \frac{(x+4)^n}{2n+1}$$

er

$$\underline{\underline{(-8, 0]}}$$

$P_5(x) = 1 + 3x + 5x^3 - x^5$

er Taylorpolynom av grad 5 om $a = 0$ for seks ganger deriverbar funksjon $f(x)$.

Generelt er Taylorpolynomet av grad n om $a = 0$ gitt ved

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Ved sammenligning av koeffisienter får vi derfor

$$f''(0) = 2! \cdot b_2 = 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$f'''(0) = 3! \cdot b_3 = 6 \cdot 5 = \underline{\underline{30}}$$

Vet at $|f^{(6)}(x)| \leq 72$ for alle x.

Taylors formel med restledd er

$$f(x) = P_5(x) + R_5(x) \quad , \quad R_5(x) = \frac{1}{6!} f^{(6)}(z) x^6$$

$$\Rightarrow |R_5(x)| = |f(x) - P_5(x)|$$

Ønsker $|R_5(x)| \leq 10^{-7}$. Dette oppnås når

$$|R_5(x)| \leq \frac{72}{720} \cdot |x|^6 \leq 10^{-7} \Rightarrow |x|^6 \leq 10^{-6} \Rightarrow \underline{|x| \leq 10^{-1}}$$

Vi er med andre ord garantert at $|R_5(x)| \leq 10^{-7}$ for

$$\underline{\underline{-0.1 \leq x \leq 0.1}}$$

3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} : \textit{Divergent.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} : \textit{Absolutt konvergent.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} : \textit{Betinget konvergent.}$$

4

Vi bruker forholdstesten på rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})x^n$, og får, med $u_n = \sin(\frac{1}{n})x^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})|x|^{n+1}}{\sin(\frac{1}{n})|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})}|x| \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\frac{1}{n+1})(-\frac{1}{(n+1)^2})}{\cos(\frac{1}{n})(-\frac{1}{n^2})}|x|$$
$$= \frac{\cos 0}{\cos 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}|x| = |x| .$$

I følge forholdstesten har vi at rekken konvergerer når $|x| < 1$ og divergerer når $|x| > 1$, dvs.: *Konvergensradien* $R = 1$.

Endepunkter.

$\underline{x = 1}$: Vi får den positive rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$. Grensesammenligning med den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{1} = 1 .$$

Siden $1 > 0$ og den harmoniske rekken er divergent, følger ved grensesammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ er *divergent.*

$\underline{x = -1}$: Her får vi den alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$. Med $a_n = \sin(\frac{1}{n})$ har vi $a_{n+1} = \sin(\frac{1}{n+1}) < \sin(\frac{1}{n}) = a_n$, og $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{n}) = 0$, så rekken er *konvergent* i følge testen for alternerende rekker.

7

(i) Forholdstesten viser at rekken konvergerer absolutt siden

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}} = \frac{n+1}{n} e^{-(n+1)^2+n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right) e^{-2n-1} \to 1 \cdot 0 = 0$$

når $n \to \infty$.

(ii) Rekken er alternerende, men alternerende rekketesten kan ikke brukes her fordi leddene ikke avtar monotont mot 0.

På den annen side er $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ en konvergent rekke ved alternerende rekketesten, mens $\sum 1/n$ er den harmoniske rekken som divergerer. Altså kan ikke rekken konvergere. Konklusjon: rekken divergerer.

8.

Det lukkede integrasjonsintervallet ligger innenfor det åpne konvergensintervallet for rekken

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} \quad \text{for } |x^4| < 1.$$

Vi kan derfor integrere rekken leddvis. Det gir

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} (-1)^n x^{4n}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1/2)^{4n+1}}{4n+1}.$$

Dette er en alternerende rekke med monotont avtagende ledd. Siden $(1/2)^{13}/13 \approx 9 \cdot 10^{-6} < 10^{-4}$, holder det å ta med tre ledd av rekken. Det gir

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^5}{5} + \frac{(1/2)^9}{9} \approx 0.4940.$$