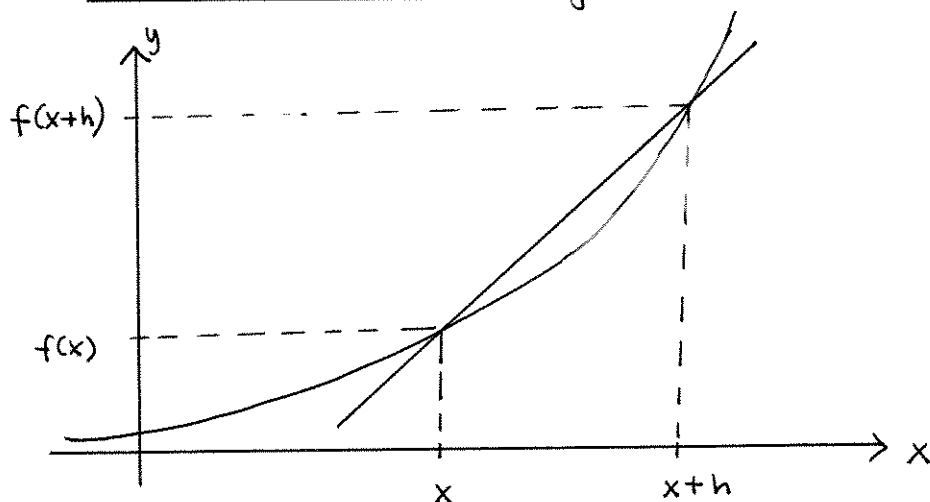


Hvorfor derivasjon?

- vi ønsker å beskrive hvordan situasjoner og fenomener rundt oss endrer seg
- løse problemer av typen størst/minst.
- derivasjon er motsatt regneart av integrasjon.

Hva er derivasjon?



$$(*) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Den deriverte gir oss et mål på hvordan grafen til en funksjon endrer seg.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ er voksende}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ er avtagende}$$

Den andre deriverte forteller oss igjen hvordan den førstederiverte endrer seg.

Dersom $f'(x_0) = 0$, vil x_0 være et maksipunkt hvis $f''(x_0) < 0$ (tangentenes stigningstall avtar!), mens $f''(x_0) > 0$ gir oss et minipunkt.

Howdan finner vi den deriverte?

Definisjonen (*) gir oss alle regnereglene for derivasjon; produktregelen, kjernereglene o.s.v.

Eksempel 1.

Vi skal vise at den deriverte av x^n er nx^{n-1} ved hjelp av definisjonen.

Vi må altså regne ut grenseverdien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ der } f(x) = x^n.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{2}x^2h^{n-2} + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{2}x^2h^{n-3} + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right)$$

$$= nx^{n-1} \quad \square$$

Kjerneregelen

Anta at g er deriverbar i a og at f er deriverbar i $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $F(x) = f(g(x))$ deriverbar i a , og

$$F'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) .$$

Eksempel 2.

Deriver $f(x) = \cos(\ln(x^2+1))$.

Vi observerer at $\ln(x^2+1)$ er en kjerne .

$$f'(x) = -\sin(\ln(x^2+1)) \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x^2+1))$$

Vi er ett skritt nærmere målet . Nå er (x^2+1) en ny kjerne, og vi bruker kjerneregelen en gang til :

$$f'(x) = -\sin(\ln(x^2+1)) \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= \underline{\underline{-\sin(\ln(x^2+1)) \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x .}}$$

Implisitt derivasjon

utfordring : Finn $\frac{dy}{dx}$ når $y^5 + 3x^2y^3 = 7x^2y$.

Dersom vi ønsker å derivere eksplisitt, må vi først finne y uttrykt ved x .

Det betyr her å løse en femtegradsligning noe som kanskje ikke er spesielt fristende

Heldigvis; implisitt derivasjon redder oss!

la oss derivere høyre og venstre side m.h.p. x :

- Hvorfor kjerneregel? Vi starter med y^5 . Hvordan skal denne deriveres med hensyn på x ?

Dersom y var lik $\sin x$, vet vi at kjerneregelen gir oss :

$$\begin{aligned}y &= \sin x \\y^5 &= \sin^5 x \\ \frac{d}{dx} y^5 &= 5 \sin^4 x \cdot \cos x\end{aligned}$$

Derfor vil $\frac{d}{dx} y^5 = 5y^4 \cdot \frac{dy}{dx}$.

Vi prøver nå å løse oppgaven:

$$5y^4 \cdot \frac{dy}{dx} + 3(2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \frac{dy}{dx}) = 7(2xy + x^2 \frac{dy}{dx}).$$

Deretter kan vi flytte alle $\frac{dy}{dx}$ over på venstre side, og få $\frac{dy}{dx}$ uttrykt ved x og y .

Eksempel 3

Finn en ligning for tangenten til kurven $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 y$ i punktet $(1,1)$.

ligning for tangent i pkt. $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Vi vet at $a = 1$ ($f(a) = f(1) = 1$). Må finne $f'(1)$.

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx}) = 4(2x \cdot y + x^2 \cdot \frac{dy}{dx})$$

$$2(1^2 + 1^2)(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{dy}{dx}) = 4(2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 \cdot \frac{dy}{dx})$$

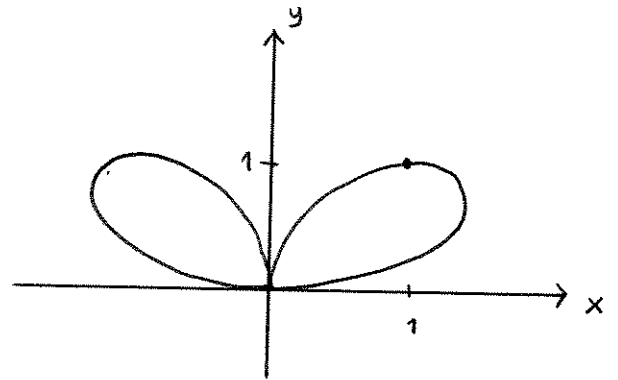
$$2 \cdot 2(2 + 2 \frac{dy}{dx}) = 4(2 + \frac{dy}{dx})$$

$$2 + 2 \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$\underline{\frac{dy}{dx} = 0}$$

$$y - 1 = 0 \quad (x - 1)$$

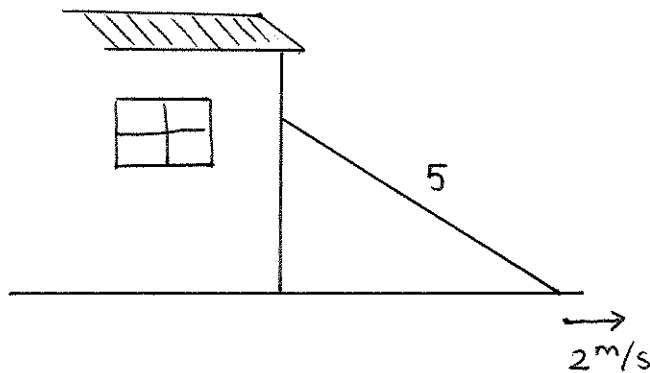
$$\underline{\underline{y = 1}}$$



Koblede hastigheter

Eksempel

En 5 meter lang stige står lent mot en husvegg. Vi drar den nederste enden av stigen vannrett vekk fra veggene med en fart av 2 m/s mens den andre enden glir nedover husveggen. Hvor fort glir den øverste enden nedover idet den nederste enden er 4 meter fra husveggen?



Pythagoras : $x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2$

Implisitt derivasjon :

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$$

Vi ønsker å finne $y'(t)$. Vi vet at $x'(t) = 2$. Når $x(t) = 4$, er $y(t) = 3$.

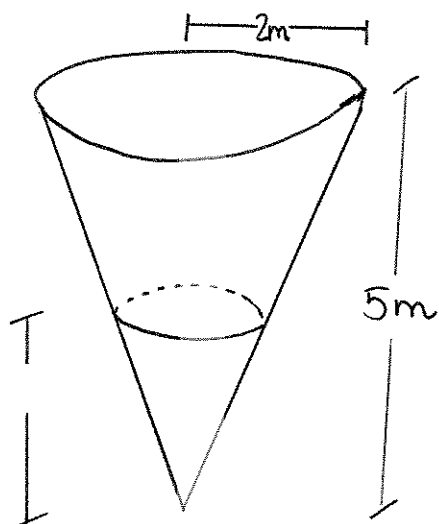
$$4 \cdot 2 + 3 \cdot y'(t) = 0$$

$$y'(t) = -\frac{8}{3} \text{ m/s}.$$

Hvorfor er $y'(t)$ negativ?

Eksempel

En tank har form som en rett sirkulær kegle med spissen ned. Høyden til tanken er 5 meter, og radien på toppen er 2 meter. Vann pumpees inn i tanken med en fart av $0,1 \text{ m}^3$ per minutt. Hvor fort øker vannstanden i det øyeblikket vannet står 3m høyt?



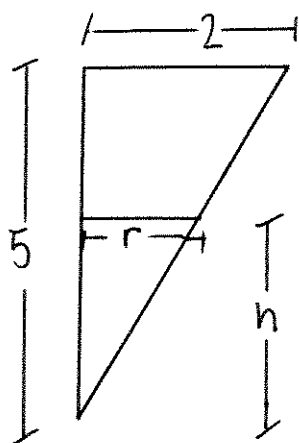
Vi skal finne endringen i vannstanden, det vil si $\frac{dh}{dt}$.

Kjerneregelen gir oss:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$$

Volum av kjege : $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$.

Hva er sammenhengen mellom r og h ?



Formlike trekanter!

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5}$$

$$r = \frac{2}{5} h$$

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{2}{5} h \right)^2 \cdot h = \frac{4\pi}{3 \cdot 25} h^3$$

$$V'(h) = \frac{4\pi}{25} h^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{25} h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$h = 3$:

$$0,1 = \frac{4\pi}{25} \cdot 3^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\underline{\underline{\frac{dh}{dt} \approx 0,022 \text{ m/min.}}}$$

Induktionsprinsippet

- 1) Vis at påstanden er sann for det første tallet i rekken.
- 2) Anta at påstanden er sann for $n=k$.
- 3) Vis at påstanden er sann for $n=k+1$.

Eksempel

Vis at $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \right)$$

1) $n=1$: V.S : $\frac{1}{1^2} = 1$

H.S : $2 - \frac{1}{1} = 1$ V.S = H.S OK.

2) $n=k$: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{k}$

3) Skal vise at påstanden er sann for $n=k+1$. Nå skal vi regne!

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} = 2 - \frac{(k+1)^2}{k(k+1)^2} + \frac{k}{k(k+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{(k+1)^2 - k}{k(k+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{k^2 + 2k + 1 - k}{k(k+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)^2} \leq 2 - \frac{k^2 + k}{k(k+1)^2}$$

$$= 2 - \frac{k(k+1)}{k(k+1)^2} = 2 - \frac{1}{k+1}.$$

□