Rekker

Eks : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Når vi ser på slike rekker, er vi interessert i å finne ut om rekken konvergerer (absolutt eller betinget) eller divergerer.

Hvis rekken konvergerer, eksisterer summen $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Hvis rekken divergerer, eksisterer ikke summen (evt. $s = \infty$).

Rekkene klassifiseres som geometrisk, alternerende, positiv, avtagende o.s.v. (Kan være flere av disse).

Geometriske rekker

Anta $a_0 \neq 0$. Den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$ konvergerer hvis $|r|<1$, og divergerer hvis $|r| \geq 1$.

Når $|r|<1$ er summen gitt ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r} .$$

Eksempel

Finn summen til: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$

Vi ser at $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{3^0} - \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$$

$(a_0 = 1, r = -\frac{1}{3})$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Positive rekker ($\sum a_n$ med $a_n \geq 0 \; \forall n$)

En positiv rekke konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

Integraltesten

Anta at f er en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon.
Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hvis og bare hvis integralet $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Eksempel

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ konvergerer eller divergerer.

$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ er en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon.

Rekken konvergerer altså kun dersom $\int_1^\infty \ln(1+\frac{1}{x})\,dx$ konvergerer.

Finner først det ubestemte integralet:

$\int \ln(1+\frac{1}{x})\,dx$ (Delvis integrasjon

$u = \ln(1+\frac{1}{x})$ $u' = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$v = x$ $v' = 1$)

$$= x\ln(1+\frac{1}{x}) - \int x \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= x\ln(1+\frac{1}{x}) - \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln|1+x| + C.$$

Så setter vi inn grensene:

$$\int_1^\infty \ln(1+\frac{1}{x})\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1+x)\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(b\ln(1+\frac{1}{b}) - \ln(1+b) - 2\ln 2\right)$$

L'Hôpital viser at $\lim_{b\to\infty}\left(b\ln\left(1+\frac{1}{b}\right)\right) = 1$,

mens $\lim_{b\to\infty} \ln(1+b) = \infty$.

Dermed er $\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx = \infty$,

og rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ divergerer.

Sammenligningstesten

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ to positive rekker.

i) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og det fins en c slik at $b_n \leq c a_n$ for alle n, vil også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergere

ii) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og det fins et positivt tall d slik at $b_n \geq d a_n$ for alle n, vil også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergere.

Eksempel

Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^3-1}$ (*) konvergerer eller divergerer.

For $n \geq 1$ er $\frac{n^2+1}{2n^3-1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$.

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, må også (*) divergere.

Grensesammenligningstesten.

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

i) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og at $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$.

Da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ii) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer

og at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$.

Da divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dette vil i praksis si:

- dersom vi har en rekke som vi tror er konvergent, kan vi prøve å dele på en kjent konverget rekke (f.eks. $\frac{1}{n^2}$), og håpe at grenseverdien er $< \infty$ når $n \to \infty$.

- dersom vi har en rekke som vi tror er divergent, kan vi prøve å dele på en kjent divergent rekke (f.eks. $\frac{1}{n}$), og håpe at grenseverdien er > 0 når $n \to \infty$.

Eksempel

Undersøk om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4n}{8n^4-2}$

er konvergent eller divergent.

Divergent?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+4n}{8n^4-2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+4n^2}{8n^4-2} = 0 \text{ (ved L'H)}$$

Grensesammenligningstesten gir oss altså ikke noe svar på om rekken er divergent.

Konvergent?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+4n}{8n^4-2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+4n^3}{8n^4-2} = \frac{3}{8} \text{ (ved L'H)}$$

Siden $\frac{3}{8} < \infty$ er rekken konvergent.

Alternerende rekker

Rekker av typen i foregående rekker, kalles alternerende.

Dersom rekken ikke er geometrisk (f.eks. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$), kan vi bruke følgende for å bestemme om en slik rekke konvergerer:

Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der størrelsen $|a_n|$ til leddene er avtagende ($|a_n| > |a_{n+1}|$) og $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, er rekken konvergent.

Feilskranke $|S - S_N| \leq |a_{N+1}|$

Eksempel

i) Vis at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergerer.

1) Avtagende : $|a_n| = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = |a_{n+1}|$.

2) $\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (f.eks ved

$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

skviseloven) .

Altså rekken er konvergent.

ii) Summen av rekken med feil mindre enn 10^{-1} :

Siden $|S - S_N| \leq |a_{N+1}|$, må vi finne det første leddet i rekken som er mindre enn $\frac{1}{10}$.

$|a_{10}| = \frac{|(-1)^n|}{10} \leq \frac{1}{10}$.

Altså : $\sum_{n=1}^{9} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$

$\approx 0{,}75$.