Tips til fremgangsmåter

(med forbehold om trykkfeil)

Oppgaver:

1) *i)* Vi ser at både roten av x og dens deriverte dukker opp. Substitusjon er ofte nøkkelen i slike oppgaver.

ii) Prøv $u = \sqrt{x}$. u er altså en funksjon av x. Hva blir da den deriverte, $\frac{du}{dx}$?

iii) "Bytt" alle x i integralet med det tilsvarende i u (husk å substituere dx).

2) *i)* Samme situasjon som i a), både e^x og dens deriverte opptrer i integralet.

3) *i)* Dersom substitusjon er våpenet, hva skal vi velge som u?

ii) Med $u = \sqrt{x}$ får vi $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, eller $dx = 2\sqrt{x}du$. Problemet er bare at vi skal substituere alle x med u, her har vi $\sqrt{x}$. Hva er denne i u?

iii) Nå gjenstår det å integrere $\int e^u \cdot 2u du$, som krever et annet redskap enn substitusjon…

4) *i)* Integralet er på "delbrøk"-form, og vi følger derfor oppskriften. Det første er å sjekke graden, og siden telleren har høyere grad enn nevneren starter vi med polynomdivisjon.

ii) Etter polynomdivisjonen sitter vi med tre atskillig enklere utfordringer, der ett av dem har sammenheng med logaritmen.

5) *i)* Nok en delbrøk. Siden graden i telleren er lavene enn i nevneren, trenger vi ikke polynomdivisjon. Da går vi videre til neste trinn som er å bestemme formen for delbrøkoppspaltningen, og deretter bestemme koeffisientene. Husk at "indre grad" bestemmer graden i telleren, "ytre grad" bestemmer antall ledd. Glem heller ikke at nevneren skal være ferdig faktorisert før delbrøksoppspaltningen kan starte.

ii) Etter koeffisientene er bestemt, har vi tre nye integral å bestemme. For den delen med grad 2 i nevneren, kan substitusjon være en innfallsport.

6) *i*) Målet er å bruke hintet på formen $1-\sin^2 x = \cos^2 x$. Vi vil gjerne få $1-\sin^2 x$ inn under rottegnet i nevneren. Vi omformer:

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{2^2}} = 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

ii) Dersom vi nå substituerer $\frac{x}{2} = \sin u$, får vi at $x = 2\sin u$ og $dx = 2\cos u\, du$.

iii) Formelen $\cos^2 v = \frac{\cos 2v+1}{2}$ kan være kjekk når man skal integrere $\int \cos^2 u du$.

7) *i*) Her ser vi at både $\sin x$ og dens deriverte dukker opp.
ii) Etter substitusjonen er delvis integrasjon en vei å gå. Hvorfor? Husk at dersom første valg av u og v i delvis integrasjon ikke virker, kan det hende det fungerer å bytte.

8) *i*) Hvorfor fungerer ikke substitusjon?
ii) Delbrøksoppspaltning er utelukket (hvorfor)? Hvordan kan vi bruke delvis integrasjon?
iii) Delvis integral bruker vi på utrykk av formen $\int u(x)v'(x)dx$. Dersom vi velger $\ln x$ lik en av disse, hva må den andre faktoren bli?

9) *i*) Følg fremgangsmåten for delbrøksoppspaltning.

Eksamensoppgaver:

E1 *i*) Integralet er på "delbrøk"-form, så vi følger oppskriften. Etter delbrøkoppspaltning, får vi de to integralene $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + \int\frac{-\frac{1}{2}x+1}{x^2-2x+2}dx$. Det første er greit, men hva med det andre?

ii) Vi skriver om for å få vekk den brudne brøken: $\int\frac{x-2}{x^2-2x+2}dx$ (med en faktor $-\frac{1}{2}$ foran). Nå skal vi forsøke å skrive om telleren (men samtidig beholde likheten) slik at den ligner mest mulig på den deriverte av nevneren (Hvorfor? Tenk på logaritmen). Siden den deriverte av nevneren er $2x-2$, starter vi med å multiplisere og dividere med 2, som gir oss $\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-2x+1}dx$. Siden vi helst vil ha telleren til å være på formen $2x-2$, bruker vi knepet med å legge til og trekke fra 2:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-4+(2-2)}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)-2}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\left[\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int\frac{-2}{x^2-2x+2}dx\right].$$

iii) En enkel substitusjon gir oss da det første integralet. Det neste er en ny utfordring. Her skal vi satse på å bruke arcustangens. Hvordan ser den deriverte til $\arctan x$ ut?

iv) Nevneren kan skrives slik $x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1$. Hvilken substitusjon trenger vi nå for å få nevneren til å se ut som den deriverte til arcustangens?

E3) *i*) Delbrøk gir oss de ti integralene $\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-x+1}{x^2+1}dx$. Det lønner seg å dele opp det siste integralet i to deler. Det første (med $-x$ i telleren) kan løses ved en substitusjon. Den andre er den deriverte av en kjent og kjær invers funksjon…

ii) Den eksakte verdien av integralet finner vi ved enkel innsetting (bruk $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ når den øvre grensen behandles).

E2) *i*) Etter substitusjonen står vi med integralet $\int\frac{du}{u^2+u+1}$ (husk at dersom $u=e^x$, så er $\frac{du}{dx}=e^x$. Hvordan kan vi få $\frac{du}{dx}$ uttrykt ved u?

ii) Nå skal vi igjen til arcustangens (vanlig når nevneren er av andre grad og telleren av nullte). Det vil si at vi ønsker nevneren på formen $(u+a)^2+b$, der vi etter hvert skal få b'en vår til å bli 1 (hvorfor vil vi det?). Ligningen $(u+a)^2+b=u^2+u+1$ gir at $a=1/2$ og $b=3/4$ (skriv ut venstre side, sammenlign konstantene foran hvert av leddene). Da blir integralet seende slik ut $\int\frac{du}{(u+1/2)^2+3/4}$.

iii) Nå skal vi få det siste leddet i nevneren til bli 1. Da faktoriserer vi slik

$(u+1/2)^2+3/4=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(u+1/2)^2+1\right]=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(u+1/2)\right)^2+1\right]$. Sett nå opp integralet og flytt konstanten $\frac{3}{4}$ utenfor. Hvilken substitusjon må vi velge for å få integralet på formen til den deriverte av arcustangens?