

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} .$$

1) $n=1$: $V.S = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$

$$H.S = \sqrt{1} = 1$$

$$V.S. \geq H.S. \quad \text{OK} .$$

2) Antar sant for $n=m$ (siden k er "oppbrøkt") .

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{m} .$$

3) Skal vise $n=m+1$:

(Kladd : Vi skal vise

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{m+1} \quad)$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \geq \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \quad (*)$$

$\uparrow$
 Bruker
 antagelsen
 i del 2.

Spørsmålet er nå om $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}}$ er større enn $\sqrt{m+1}$ (hvis ja ; da er vi ferdige !)

Altså ; $\sqrt{m+1} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}}$.

Venstre side kan skrives som $\frac{m+1}{\sqrt{m+1}}$,

høgre side som $\frac{\sqrt{m}\sqrt{m+1} + 1}{\sqrt{m+1}}$.

Så hvis m er mindre enn eller like $\sqrt{m}\sqrt{m+1}$ er vi ferdige . Men ;

$$m \leq m+1$$

$$m^2 \leq m(m+1)$$

$$m \leq \sqrt{m(m+1)}$$

Så; fortsettelsen på (*) :

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ant. i} \\ 2}}{\geq} \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mellom-} \\ \text{regning} \\ \text{som f. eks.} \\ \text{ovenfor.}}}{\geq} \sqrt{m+1}$$

$\uparrow$ deler summetegnet

Det fins flere måter å regne trinn 3 på .