(7) Skal vise at for alle natūrlige tall n er $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

1) Vi må vise at påstanden er oppfylt for det første tallet, her $n=1$:

$$V.S: \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

$$H.S: 2(\sqrt{1+1} - 1) = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 2(1{,}4 - 1) = 0{,}8.$$

V.S > H.S. ok.

2) Indūksjonsantagelsen:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{k+1} - 1)$$

(denne skal vi brūke i del 3).

3) Nå gjenstår det å vise at påstanden gjelder for $n=k+1$ (NB: antagelsen i del 2 gjelder kūn for k, og det er strengt forbūdt å sette inn $k+1$ på begge sider for så å si at man er ferdig!)

Vi tar ūtgangspūnkt i venstre side, og håper vi kan vise at denne innsatt $k+1$ er oppfylt når $k+1$ blir satt inn på høyre side:

Altså; det kan være kjekt å se litt på hva vi faktisk ønsker å vise:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{k+2}-1\right).$$

Legg merke til at vi altså ikke kan sette opp denne og regne videre. Det er dette vi skal vise, og det kan vi ikke bruke. Det vi imidlertid kan (og må) bruke, er antagelsen i del 2:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{k+1}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

fra ind.antagelsen i del 2.

Dersom vi nå kan vise at

$$2\left(\sqrt{k+1}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \overset{?}{>} 2\left(\sqrt{k+2}-1\right)$$

er vi i boks.

Det er her ulikheter byr på ett par ekstra utfordringer. Tenk igjennom følgende:

Dersom vi skal vise at a er større enn b (som er det samme som å vise at b er mindre enn a), pleier vi å sammenligne med en del størrelser som ligger mellom de to verdiene. F.eks: Vi skal vise at $a > b$, eller $b < a$ (personlig foretrekker jeg å starte med den minste, men det er bare en smakssak...), prøver vi å lete etter noen sammenhenger slik at:

$$b < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < a .$$

Altså; b er mindre enn c_1, som er mindre enn c_2 o.s.v. Til slutt kan vi konkludere at $b < a$. Problemet er todelt:

i) det kan være vanskelig å finne størrelsene c_i (det lønner seg å hele tiden ha et øye med b, og velge størrelsene slik at vi til slutt får b helt til høyre.

ii) dersom vi har valgt en $c_i > a$, har vi sammenlignet med en for stor verdi. Da oppstår følgende situasjon:

$$b < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < c_i$$

b er altså mindre enn c_i, men siden den er større enn a kan vi ikke konkludere med at $b < a$.
Det vil si, vi må velge de størrelsene vi sammenligner med mellom b og a.

I denne oppgaven må vi finne noen passende størrelser slik at:

$$2\left(\sqrt{k+2}-1\right) < \ldots < \ldots < \ldots < 2\left(\sqrt{k+1}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Det kan være lurt å sette høyre side på en felles brøkstrek. Jeg tenkte ca. slik

$$V.S: \quad 2\left(\sqrt{k+2}-1\right) = \frac{2\left(\sqrt{k+2}-1\right)\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}$$

$$H.S: \quad \frac{2\left(\sqrt{k+1}-1\right)\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}$$

Hvis vi nå kan vise (ved å sammenligne med diverse "mellomledd") at

$$(\heartsuit)\ 2\left(\sqrt{k+2}-1\right)\sqrt{k+1} \overset{?}{<} 2\left(\sqrt{k+1}-1\right)\sqrt{k+1}+1$$

har vi bevist påstanden for alle $n \in \mathbb{N}$.

La oss se et eksempel på hvilke problemer som kan oppstå:

$$2(\sqrt{k+2}-1)\sqrt{k+1} < 2(\sqrt{k+2}-1)\sqrt{k+1} + 1$$

legger til 1.

Høyresiden er opplagt større enn venstre side. Men; den er også større enn høyresiden i (♥). Altså har vi sammenlignet oss ut av området! Faktum er at de to størrelsene ligger tett inntil hverandre, og at det krever mye prøving før vi finner de det er hensiktsmessig å bruke.

Prøv på egen hånd. Fortsettelsen kommer senere!

P.S. Det er viktig at vi får tak i "sammenligningsprosessen". Denne bør vi jobbe med alene, prøve og feile, før løsningen blir presentert.