Et løsningsforslag.

NB! Alle mulige forbehold om "trykkfeil" tas. Dette til etterretning...

(2) Separabel : $\frac{dy}{dx} = x - 2xy$

$$\frac{dy}{dx} = x(1-2y)$$

$$\frac{dy}{1-2y} = x\,dx$$

Integrer på begge sider av likhetstegnet

(3) Separabel : $\frac{dy}{y^2-y-2} = \frac{dx}{x^2+2x+2}$

Integrasjon på begge sider.
Venstre side: Nevneren kan faktoriseres, så delbrøkoppspalting.

Høgre side: Delbrøkoppspalting fungerer ikke (hvorfor?).

Vi kan bruke arctan x,

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + c .$$

Hvordan må nevneren skrives?

$$\left(\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x^2+2x+1)+1} = \frac{1}{(x+1)^2+1} \right).$$

4 a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt}{x^3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{yx^2} \quad ; \quad y(1) = 1$$

$$y\,dy = \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{x} + C$$

$$y^2 = -\frac{2}{x} + c'$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow -\frac{2}{1} + c' = 1$$
$$c' = 3$$

$$y^2 = -\frac{2}{x} + 3$$

$$y = \pm\sqrt{-\frac{2}{x} + 3}$$

Ønsker en kontinuerlig y, altså $x \geq 2/3$ (hvorfor? Hva skjer med andre verdier?).

5 a) Nok en separabel sak.

b) Siden $y = \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^{2/3} - 1$, er

$$x = \frac{2}{3}(y+1)^{3/2} - 1.$$

Da er $\frac{dx}{dy} = (y+1)^{1/2}$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left((y+1)^{1/2}\right)^2}\, dy = \left[\frac{2}{3}(y+2)^{3/2}\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}(4-\sqrt{2})}}$$

6

La T_S være Dollys temperatur, og la $T(t)$ være termometerets temperatur ved tidspunkt t. Da gjelder

$$T'(t) = k(T_S - T(t))$$

der k er en positiv proporsjonalitetskonstant. Vi løser den separable differensialligningen:

$$\int \frac{dT}{T_S - T} = k \int dt$$
$$-\ln|T_S - T| = kt + C_1$$
$$T_S - T(t) = Ce^{-kt}$$

der C er en vilkårlig reell konstant. Vi har videre

$$T(0) = 15 \quad \Rightarrow \quad T_S - 15 = C \quad \Rightarrow \quad T_S - T(t) = (T_S - 15)e^{-kt}$$
$$T(10) = 25 \quad \Rightarrow \quad T_S - 25 = (T_S - 15)e^{-10k} \quad \Rightarrow \quad e^{-10k} = \frac{T_S - 25}{T_S - 15}$$
$$T(20) = 31 \quad \Rightarrow \quad T_S - 31 = (T_S - 15)e^{-20k} = (T_S - 15) \cdot \left(\frac{T_S - 25}{T_S - 15}\right)^2$$

som er en ligning for T_S. Ligningen kan skrives

$$T_S^2 - 46T_S + 465 = T_S^2 - 50T_S + 625$$

og har løsning $T_S = 40$.

7

Dersom $T = T(t)$ er temperaturen på Kjell Magnes kontor ved tiden t, og T_{ute} er den konstante utetemperaturen, sier Newtons lov:

(N) $$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ute}})$$

hvor k er en positiv konstant. Vi setter foreløpig $T(0) = T_0$, og løser differensialligningen (N) ved separasjon av de variable:

$$\int \frac{dT}{T - T_{\text{ute}}} = -k \int dt \Rightarrow \ln(T - T_{\text{ute}}) = -kt + C \Rightarrow T - T_{\text{ute}} = e^C e^{-kt}$$
$$T = T_{\text{ute}} + e^C e^{-kt}$$

Innsetting for $t = 0$ i den siste ligningen gir:

$$T_0 = T_{\text{ute}} + e^C \Rightarrow e^C = T_0 - T_{\text{ute}}$$
$$T = T_{\text{ute}} + (T_0 - T_{\text{ute}})e^{-kt}$$

Vi lar $t = 0$ svare til klokken 00.00 den 1. januar 2000, og bruker tallverdiene fra oppgaven: $T_0 = 19.0$, $T_{\text{ute}} = -36.9$. Dette gir:

$$T = -36.9 + (19.0 - (-36.9))e^{-kt} = 55.9 \cdot e^{-kt} - 36.9$$

Bruker så at $T = 10.8$ klokken 01.00, dvs. når $t = 1$ (vi måler t i timer):

$$10.8 = (55.9)e^{-k \cdot 1} - 36.9 \Rightarrow e^{-k} = \frac{10.8 + 36.9}{55.9} = \frac{47.7}{55.9} \Rightarrow k = \ln 55.9 - \ln 47.7$$
$$T = 55.9 \cdot e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} - 36.9$$

Bestemmer til slutt når vannet i glasset begynner å fryse, dvs. når $T = 0$:

$$T = 55.9 \cdot e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} - 36.9 = 0 \Rightarrow e^{-(\ln 55.9 - \ln 47.7)t} = \frac{36.9}{55.9}$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln 55.9 - \ln 36.9}{\ln 55.9 - \ln 47.7} \approx 2.6183 \approx 2 \text{ timer og } 37 \text{ min.},$$

mao.: *Vannet begynner å fryse ca. kl. 02.37 den 1. januar 2000.*

8

Halveringstid for ^{210}Po:

$$\tau = 140 \text{ dg}$$

La n være antall halveringstider for å redusere en mengde M_0 til en mengde M_1. Har da at

$$M_1 = (\tfrac{1}{2})^n M_0$$

I dette tilfellet er $M_1 = M$, $M_0 = 8M$. Dette gir

$$1 = (\tfrac{1}{2})^n \cdot 8$$

$$\Rightarrow \quad 2^n = 8 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \underline{3}$$

Tiden for å redusere $8M$ ^{210}Po til M ^{210}Po er derfor

$$t = 3\tau = 3 \cdot 140 \text{ dg} = \underline{\underline{420 \text{ dg}}}$$

Eventuelt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Start} & : & 8M_0 \\ \text{Etter } 140\text{dg} & : & 4M_0 \\ \text{Etter } 280\text{ dg} & : & 2M_0 \\ \text{Etter } 420\text{ dg} & : & M_0 \end{array}\right\} \text{P.g.a. halveringstid}$$

Elegant løsning, men fungerer den alltid? Hva om vi hadde $10M_0$ til å begynne med?