Vis at den uendelige rekken

1 (*) $$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$$

er konvergent. Konvergerer rekken absolutt eller betinget? Partialsummen

$$S_9 = \sum_{n=2}^{9}(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)$$

er tilnærmet lik summen S av rekken $(*)$. Hva kan du, uten bruk av kalkulator, si om differansen $S - S_9$?

2 a) Avgjør om rekkene konvergerer betinget, konvergerer absolutt eller divergerer

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+\sqrt{n}} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\,(2n)^n}$$

b) Bestem konvergensintervallet for rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{(x+4)^n}{2n+1}$$

La

$$P_5(x) = 1 + 3x + 5x^3 - x^5$$

være Taylorpolynomet av grad 5 om $a = 0$ for en 6 ganger deriverbar funksjon $f(x)$.

Bestem $f''(0)$ og $f'''(0)$.

For hvilke x kan en garantere at

$$|f(x) - P_5(x)| \leq 10^{-7}$$

når $|f^{(6)}(x)| \leq 72$ for alle x?

3 For hver av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

avgjør om den er

i) absolutt konvergent   ii) betinget konvergent   iii) divergent.

Svarene skal ikke begrunnes.

4 Bestem konvergensradien R til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Undersøk også om rekken konvergerer for $x = -R$ og $x = R$.

5

a) Bestem konvergensradien R for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)4^n}$$

og undersøk om rekken konvergerer for $x = \pm R$.

b) La $g(x)$ betegne summen av rekken i a) for $|x| < R$. Vis at

$$g'(x) = -x \ln\left(1 - \frac{x}{4}\right).$$

6

I følge Taylors formel med restledd får vi

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{(1+z)^{3/2}}$$

for en z mellom 0 og x. Bruk dette til å vise at

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^4}\,dt = 1{,}1 - R \quad \text{der } \frac{1}{144\sqrt{2}} < R < \frac{1}{72}.$$

7

For hver av rekkene

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$$

bestem om rekken divergerer, konvergerer absolutt eller konvergerer betinget.

8

Bruk rekkeutviklingen

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \qquad (|t| < 1)$$

til å beregne integralet

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

med en feil mindre enn 10^{-4} i absoluttverdi.

9

a) Vis at den første av rekkene under er divergent. Er den andre rekken divergent, betinget konvergent, eller absolutt konvergent?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\sqrt{n})\sqrt{\ln n}}.$$

b) Potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$$

er gitt. Vis at rekken konvergerer for alle x, og finn rekkens sum når $x = 1$.