Øvingsoppgaver

① Finn $\frac{dy}{dx}$.

a) $y = \sqrt{x^3}$ b) $y = (x^2 + 4x)^{5/2}$ c) $y = \frac{x^4 + x^2}{x^2 + x + 1}$

d) $y = 9x^{-1}$ e) $y = \sqrt{\frac{1}{5x^6}}$ f) $y = \frac{6x^2 + \sqrt{x}}{4}$

g) $y = \sqrt{1 + \sin\sqrt{x}}$ h) $y = \sqrt{x^6 + x^4}$

② Finn maks- og min for funksjonen

$$h(x) = x + \frac{1}{x}.$$

③ Olav Tryggvason-statuen på torvet i Trondheim er 3,9 meter høy og står på en 16,75 m høy sokkel av granitt. La $\theta(t)$ være vinkelen som solens stråler danner med det horisontale torvet ved tidspunktet t. Hvor fort øker lengden av skyggen av statuen idet $\theta = \pi/6$, dersom $\theta'(t) = -\pi/6$ rad/time?

(4) Vis at funksjonen har nøyaktig ett nullpunkt, og bruk Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for dette med to sikre desimaler.

a) $x^3 + 3x + 9$

b) $x + \sin x + 1$

(5) Finn en tilnærmet verdi for π med 9 sikre desimaler ved å bruke Newtons metode til å løse ligningen $\sin x = \frac{1}{2}$.

(6) Et tomt rektangulært svømmebasseng med lengde 25m og bredde 10m fylles med vann, 500 l/min. Bunnen har en helning på $\pi/6$ med horisontalplanet i lengderetningen. Hvor fort stiger vannhøyden i bassenget etter 10 minutter? Enn etter 65 timer?

(7) Vis at for alle naturlige tall n er

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right).$$

Eksamensoppgaver

1. Finn ligningen for tangenten til kurven

$$2xy + \sin y = 2\pi$$

i punktet $(1, \pi)$.

2. Vis at funksjonen

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

er konstant for $0 \leq x \leq 4$. Hva er funksjonens konstante verdi?

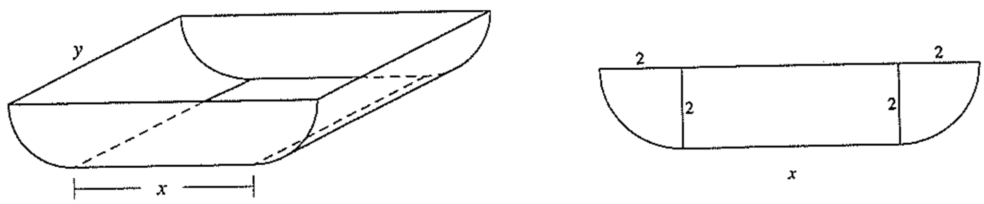
3. Vis at grafen til ligningen

$$x^3 + y^3 = xy - 1$$

ikke har horisontal tangent ($dy/dx = 0$) i noen punkter.

4. En wire med lengde L deles i to deler. Den ene delen bøyes til et kvadrat og den andre til en likesidet trekant. Avgjør hvordan wiren skal deles for at summen av de to arealene skal bli minst mulig.

5. Et åpent trau er formet som på figuren, bunnflata er et rektangel med bredde x og lengde y. Endeflatene er plane flater som består av et rektangel og to kvartsirkler med radius 2. Trauet har et gitt volum $V = 16\pi$.



Finn dimensjonene (x og y) av trauet når arealet A av overflata (dvs. bunnflata, de to endeflatene og de to krumme sideflatene) er minst mulig.

6 Volumet av en kuleformet ballong øker med konstant vekstrate lik 8 cm^3 pr. minutt. Hvor fort øker radien på det tidspunktet da radien er nøyaktig 10 cm?

Hvor fort øker arealet av ballongens overflate ved det samme tidspunktet?

7 a) Gitt funksjonen

$$f(x) = x^{\alpha-1} - \alpha \ln x, \qquad x > 0$$

der α er en konstant, $\alpha > 1$.

Vis at $f(x)$ oppnår sin minimumsverdi for $x = \left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\right]^{1/(\alpha-1)}$. For hvilke verdier av α er minimumsverdien negativ?

b) Gjør rede for at ligningen

$$x^{1/3} - \frac{4}{3}\ln x = 0$$

har nøyaktig to løsninger. Velg en startverdi x_0 og bruk Newtons metode til å finne tilnærmingsverdier x_1, x_2 for den største av de to løsningene.

8 Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

for alle heltall $n \geq 1$.