

D)

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 32x - 39}}$$

Dersom vi hadde en x i telleren, kunne vi forsøkt oss med en substitusjon (hvordan?). Her har vi ikke det, og må finne andre fremgangsmåter.

Integral som dette kan ofte forenkles ved først å skrive om $-4x^2 + 32x - 39$ til et fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned} -4x^2 + 32x - 39 &= -4(x^2 - 8x) - 39 \\ &= -4(x^2 - 8x + 16) - 39 + 64 \\ &= -4(x - 4)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4(x-4)^2 + 25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(1 - \frac{4}{25}(x-4)^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}(x-4)\right)^2}}$$

$$u = \frac{2}{5}(x-4)$$

$$du = \frac{2}{5} dx$$

$$dx = \frac{5}{2} du$$

$$I = \frac{1}{5} \int \frac{\frac{5}{2} du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin u + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{5}(x-4)\right) + C}}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^3} dx$$

Delbrøk? 1) Rasjonal funksjon (polynom i teller og nevner)

2) Graden til nevneren er større enn graden til telleren

3) Nevneren er fullstendig faktorisert

$$\left(x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \right).$$

Vi lar integralet ligge på vent, og finner først delbrøkoppspaltingen:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2x + 2)} \quad (*)$$

Hvis vi multipliserer med $(x^2 + 2x + 2)^3$ på begge sider, får vi:

$$x^3 + 3x^2 + 4x = (Ax+B)(x^2+2x+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2x+2) + Ex+F$$

Neste trinn er å multiplisere ut høyre-siden. Så bruker vi at to polynomer er like bare hvis koeffisientene foran hver grad er like.

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

$$\Rightarrow a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0$$

Dette gir oss seks ligninger og seks uljente (A, B, C, D, E, F) . Vi kan imidlertid observere at $A=0$, fordi A vil bli stående alene foran x^5 -leddet (og på venstre side har vi ingen x^5 -ledd).

Med $A=0$, vil også $B=0$, fordi B blir stående alene foran x^4 -leddet.

Med $A=B=0$ får vi:

$$x^3 + 3x^2 + 4x = Cx^3 + 2Cx^2 + 2Cx + Dx^2 + 2Dx + 2D + Ex + F$$

$$= Cx^3 + (2C+D)x^2 + (2C+2D+E)x + (2D+F)$$

Dette medfører at :

$$C = 1$$

$$2C + D = 3$$

$$2C + 2D + E = 4$$

$$2D + F = 0$$

Altså ; $A = B = E = 0$, $C = D = 1$, $F = -2$.

Disse setter vi så inn i (*), og får :

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx = \int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

løses ved fullstendig
substitusjon... kvadrat...