**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen tlf.73 59 35 25

# EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

6. august 2007
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 27. august 2007

*Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

## Oppgave 1

Bestem grenseverdiene

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)-x^2}{x^6}.$$

## Oppgave 2

Finn volumet av legemet en får ved å rotere området begrenset av $x = 2y - y^2,\ x = 0$, om aksen $y = -1$.

## Oppgave 3

Finn tyngdepunktet (sentroiden) til området begrenset av kurvene $y = x^3$ og $y = \sqrt[3]{x}$, der $x \geq 0$.

**Oppgave 4**

Bruk Eulers metode med steglengde $h = 0.2$ for å finne en tilnærmelse til $y(0.4)$, der $y(x)$ oppfyller initialverdiproblemet

$$y' = y^2 + \frac{1}{1-x},\ y(0) = 0.$$

**Oppgave 5**

La $a_1 = \sqrt{2}$ og $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

Vis ved induksjon at

$$a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Hint: Bruk identiteten $2\cos^2\frac{u}{2} = 1 + \cos u$.

**Oppgave 6**

**a)** Avgjør om rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1},\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

konvergerer eller divergerer.

**b)** Vis at Taylorrekka til $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$ (der vi definerer $f(0) = 1$) omkring $x = 0$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}.$$

Bruk dette til å finne en tilnærmet verdi for

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\arctan x}{x} dx,$$

der feilen er mindre enn $10^{-8}$.

**Oppgave 7**

En elastisk kuleformet ballong fylles med vann med rate $Q = 4\pi\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$. Anta ballongen lekker med rate proporsjonalt med arealet til overflaten av ballongen, der proposjonalitetskonstanten er $k = \frac{1}{100}\mathrm{cm}/\mathrm{min}$.

**a)** Vis at radien $r(t)$ til ballongen oppfyller differensialligningen

$$\left(1 + \frac{100}{r^2 - 100}\right)\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{100}$$

for $0 < r(t) < 10$ .

**b)** Anta $r(0) = 0$ , løs differensialligningen, og finn $r(t)$ på implisitt form. Ved hvilken tid er $r = 5$ cm?