Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, avsluttende eksamen 15.12.2006

$\boxed{1}$ Den første grenseverdien er en ubestemt form av typen "0/0", og L'Hopitals regel gir

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Den andre grenseverdien er av form "1^∞". Vi innfører derfor en ny variabel

$$y=\ln\left[\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}\right]=\frac{1}{x^2}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{\ln(1-x^2/2)}{x^2}.$$

Denne er av form "0/0" når $x\to 0$, og L'Hopitals regel gir

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x^2/2}(-x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1-x^2/2)}=-\frac{1}{2},$$

og derfor er den opprinnelige grenseverdien gitt ved

$$\lim_{x\to 0}e^y=\underline{\underline{e^{-1/2}=\frac{1}{e^{1/2}}}}.$$

$\boxed{2}$ Vi faktoriserer nevner og skriver på delbrøk:

$$\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{x-2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}.$$

Ganger vi så med $x(x+1)$, får vi

$$x-2=A(x+1)+Bx.$$

Ved å sette $x=0$ får vi $-2=A$, og $x=-1$ gir $-3=-B$, dvs. $B=3$. Altså er

$$\int\frac{x-2}{x^2+x}\,dx=\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x}\right)dx=\underline{\underline{3\ln|x+1|-2\ln|x|+C=\ln(|x+1|^3)-\ln(x^2)+C}}.$$

$\boxed{3}$ Den første rekken skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, der $a_n=\frac{n+1}{n}$. Men siden

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,$$

ser vi at leddene $(-1)^n a_n$ i rekken ikke konvergerer mot null. Fra n-te leddstesten konkluderer vi derfor at

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}\quad\text{divergerer.}}}$$

Den andre rekken skriver vi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, der $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$. Vi ser at når n er stor, så er leddet 1 i nevneren til a_n neglisjerbart sammenlignet med leddet n^2, så vi forventer at rekken oppfører seg på samme måte som rekken med ledd

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

For å bevise denne formodningen bruker vi grensesammenligningstesten. Siden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n^2} = 1,$$

konkluderer vi fra grensesammenligningstesten at rekkene $\sum a_n$ og $\sum b_n$ enten begge konvergerer eller begge divergerer. Men $\sum b_n$ er ikke annet enn den harmoniske rekken, som vi vet divergerer. Svaret er altså at

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \quad \text{divergerer.}}}$$

$\boxed{4}$ Både T og sylinderen som bores ut er rotasjonslegemer om y-aksen, og det samme er derfor tilfellet for den gjenværende delen av T, som vi kaller S. Vi ser at S fremkommer ved å rotere området

$$1 \le x \le 2, \qquad 0 \le y \le 4 - x^2$$

om y-aksen. Sylinderskallmetoden gir da volumet V av S som integralet

$$V = \int_1^2 2\pi x(4-x^2)\,dx = 2\pi\left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = 2\pi\left[(8-4) - \left(2 - \frac{1}{4}\right)\right] = 2\pi\frac{9}{4} = \underline{\underline{\frac{9\pi}{2}}}.$$

Alternativt kan vi bruke skivemetoden med tverrsnitt vinkelrett på y-aksen. Da må vi først merke oss at den øvre integrasjonsgrensen for y er $4-1^2 = 3$. Tverrsnittet er da en sirkulær ring med indre radius lik 1 og med ytre radius lik

$$x = \sqrt{4-y},$$

som vi får ved å løse $y = 4 - x^2$ for x, med $x \ge 0$. Vi får da

$$V = \int_0^3 \pi\left[\left(\sqrt{4-y}\right)^2 - 1^2\right]dy = \int_0^3 \pi\left[(4-y)-1\right]dy = \pi\left[3y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^3 = \pi\left(9 - \frac{9}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{9\pi}{2}}}.$$

Enkelte vil kanskje tolke denne oppgaven slik at det kun er en sylinder med plan toppflate som bores ut. I så fall må vi legge til volumet av kalotten som er igjen på toppen, som ved sylinderskallmetoden er

$$V' = \int_0^1 2\pi x\left[(4-x^2)-3\right]dx = \frac{\pi}{2},$$

og totalvolumet blir da $V + V' = \dfrac{9\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 5\pi$.

5 Ved å sette $x = t^2$ inn i den oppgitte rekken for $\sin x$, får vi

$$\begin{aligned}\sin(t^2) &= t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k+2}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

Ved å dividere hvert ledd med t^2 får vi rekken

$$\begin{aligned}\frac{\sin(t^2)}{t^2} &= 1 - \frac{t^4}{3!} + \frac{t^8}{5!} - \frac{t^{12}}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{4k}}{(2k+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

At denne rekken konvergerer for alle t kan vi slutte direkte fra det faktum at rekken for $\sin x$ konvergerer for alle x. (Evt. kan man bruke forholdstest for å se dette.) Leddvis integrasjon er derfor gyldig, og gir følgende representasjon av funksjonen f:

$$\begin{aligned}f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{t^{4k}}{(2k+1)!}\,dt \\ &= \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)\cdot(2k+1)!}}} \\ &= \underline{\underline{x - \frac{x^5}{5\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)\cdot(2k+1)!} + \cdots}}.\end{aligned}$$

For å besvare det siste spørsmålet, setter vi $x = 1$, som gir

$$\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{5\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \frac{1}{13\cdot 7!} + \frac{1}{17\cdot 9!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(4k+1)\cdot(2k+1)!} + \cdots.$$

Dette er en alternerende rekke hvis ledd—i absoluttverdi—er monotont avtagende og konvergerer mot null. Vi kan derfor anvende resteleddsestimatet for slike alternerende rekker, som sier at

$$|\text{restledd}| \le |\text{neste ledd}|.$$

Vi må derfor finne det første leddet i rekken med absoluttverdi mindre enn 10^{-6}. Utregning gir $5\cdot 3! = 30$, $9\cdot 5! = 1080$, $13\cdot 7! = 65520$ og $17\cdot 9! = 6\,168\,960 > 10^6$. Vi har derfor

$$\underline{\underline{\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,dt \approx 1 - \frac{1}{5\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \frac{1}{13\cdot 7!} = \frac{190187}{196560} \approx 0{,}967577}}$$

med avvik garantert mindre enn 10^{-6} i absoluttverdi.

6 Fra figuren ser vi at

$$\tan\theta = \frac{x}{100},$$

og derivasjon mhp. tiden t gir, siden $\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = 1 + \tan^2\theta$,

$$\left(1 + \tan^2\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Men $dx/dt = 5$, og i det øyeblikk $x = 200$, har vi $\tan\theta = 200/100 = 2$, så

$$(1+2^2)\frac{d\theta}{dt} = \frac{5}{100}$$

Svaret er derfor

$$\underline{\underline{\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{100} \quad \text{rad/s.}}}$$

$\boxed{7}$ **a)** Vi separerer de variable:

$$\frac{dx}{a-bx} = dt,$$

og integrerer:

$$\int \frac{dx}{a-bx} = \left(-\frac{1}{b}\right)\ln|a-bx| = \int dt = t + C_1.$$

Siden $x = 0$ når behandlingen starter, ser vi at $a - bx$ må være positiv, så vi kan fjerne absoluttverdien. Det gir

$$\ln(a-bx) = -bt + C_2,$$

og videre

$$a - bx = e^{\ln(a-bx)} = e^{-bt+C_2} = Ce^{-bt} \qquad \left(C = e^{C_2}\right).$$

Løser vi dette for x, får vi

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{1}{b}\left(a - Ce^{-bt}\right).}}$$

(Sunn fornuft sier at $x = 0$ ved starten av behandlingen, så hvis man setter $t = 0$ ved starten av behandlingen, må det godtas å bruke $x(0) = 0$ som en initialbetingelse. I så fall blir svaret $x(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right)$.)

Vi ser da at

$$\underline{\underline{\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b} - \frac{C}{b}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-bt}\right) = \frac{a}{b},}}$$

der vi brukte at $\lim_{t\to\infty} e^{-bt} = 0$, siden $b > 0$.

b) Vi setter $t = 0$ i det klokken er 13.00. De gitte betingelsene sier da:

(1) $\quad x(0) = 0,$

(2) $\quad x(1) = 10,$

(3) $\quad x(2) = 15.$

Betingelsen (1) gir:

$$x(0) = \frac{a-C}{b} = 0 \implies C = a.$$

Derfor er

$$x(t) = \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right).$$

Betingelsene (2) og (3) gir da

(4) $\quad \frac{a}{b}\left(1 - e^{-b}\right) = 10,$

(5) $\quad \frac{a}{b}\left(1 - e^{-2b}\right) = 15,$

og dette ligningssystemet må løses for a og b. Knepet er nå å se at

$$\left(1-e^{-2b}\right)=\left(1-e^{-b}\right)\left(1+e^{-b}\right),$$

fra 3. kvadratsetning. Deler vi ligning (5) på ligning (4), får vi derfor

$$1+e^{-b}=\frac{15}{10}\implies e^{-b}=\frac{1}{2}\implies b=\ln 2.$$

Innsatt i (4) gir dette

$$\frac{a}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}=10\implies a=20\ln 2.$$

Vi konkluderer at

$$x(t)=20\left(1-e^{-t\ln 2}\right)=20\left(1-2^{-t}\right).$$

Vi løser til slutt ligningen $x(t)=19$, dvs.,

$$20\left(1-e^{-t\ln 2}\right)=19\iff e^{-t\ln 2}=\frac{1}{20}\iff t=\frac{\ln 20}{\ln 2}\approx 4{,}32,$$

som omregnet til klokkeslett blir $13+4=17$ timer og $0{,}32\cdot 60=19{,}20$ minutter. Vi ignorerer sekunder, og svaret blir derfor nitten minutter over fem om ettermiddagen:

$$\underline{\underline{\text{konsentrasjonen når 19 mg/l klokken 17.19}}}$$