LØSNINGSFORSLAG
TMA4100, MATEMATIKK 1
KONT. 2007

Oppgave 1

Vi har

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Her er

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = 0,$$

der l'Hoptitâl er brukt i overgangen merket $"\frac{0}{0}"$.

Altså er

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1,$$

På neste delspørsmål kan en bruke l'Hoptitâl tre ganger:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x\cos x^2 - 2x}{6x^5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x^2 - 1}{3x^4} \overset{"\frac{0}{0}"}{=}$$
$$.$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x\sin x^2}{12x^3} = -\frac{1}{6}\frac{\sin x^2}{x^2} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} -\frac{1}{6}\frac{2x\cos x^2}{2x} = -\frac{1}{6}.$$

Alternativt kan en bruke Taylorrekka til $\sin u$, sette $u = x^2$, og se at grenseverdien blir $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

Oppgave 2

Kurva $x = 2y - y^2$ skjærer $y-$aksen for $y = 0$ og $y = 2$. Altså er området som skal roteres om linja $y = -1$ gitt ved $\left\{(x, y) : 0 \le x \le 2y - y^2, 0 \le y \le 2\right\}$.

Ved sylinderskallmetoden er

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta y\,,$$

der

$$r = 1 + y \text{ og } h = 2y - y^2\,.$$

Dette gir volumet

$$V = \int_0^2 2\pi(1+y)(2y-y^2)\,dy = \frac{16\pi}{3}\,.$$

Oppgave 3

Kurvene $y = x^3$ og $y = \sqrt[3]{x}$ skjærer hverandre i $(0,0)$ og $(1,1)$, og for $0 \le x \le 1$ er $\sqrt[3]{x} - x^3 \ge 0$. Altså er arealet begrenset av de to kurvene gitt ved

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^3\right)dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Området er symmetrisk om linja $y = x$ siden $y = \sqrt[3]{x}$ og $y = x^3$ er omvendt funksjon til hverandre. Altså er $\overline{x} = \overline{y}$, der $(\overline{x}, \overline{y})$ er tyngdepunktet. Vi har

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx = \frac{1}{A}\int_0^1 \left(x^{\frac{4}{3}} - x^4\right)dx = 2\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{16}{35}\,.$$

Det vil si at tyngdepunktet er $\left(\frac{16}{35}, \frac{16}{35}\right)$.

Oppgave 4

Ligninga $y' = y^2 + \frac{1}{1-x}$, og initialbetingelsen $y(0) = 0$ er gitt. Med steglenge $h = 0.2$ gir det følgende rekursjonsformel for Eulers metode:

$$x_{n+1} = x_n + h,\ \ x_0 = 0\,, \qquad y_{n+1} = y_n + 0.2\left(y_n^{\,2} + \frac{1}{1-x_n}\right),\ \ y_0 = 0\,.$$

Dette gir

$$x_1 = 0.2,\ y_1 = 0 + 0.2\left(0^2 + \frac{1}{1-0}\right) = 0.2\,,$$

$$x_2 = 0.4,\ y_2 = 0.2 + 0.2\left((0.2)^2 + \frac{1}{1-0.2}\right) = 0.458\,.$$

Altså er tilnærmet verdi for $y(0.4)$ gitt ved $y_2 = 0.458$.

Oppgave 5

For $n=1$ har vi $a_1 = 2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, som stemmer.

Anta nå at $a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ for en vilkårlig $n \geq 1$. Da er

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)} =$$

$$\sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}\right)\right)} = 2\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right),$$

der vi kan ta vekk absoluttverditegnet siden $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) > 0$.

Ved induksjon er altså $a_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ for $n = 1, 2, 3....$

Oppgave 6a

La $a_n = \frac{n}{n^3+1}$ og $b_n = \frac{1}{n^2}$. Da er $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Siden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ er en konvergent p-rekke ($p=2$), er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ konvergent ved grensesammenligningstesten. Alternativt kan man bruke sammenligningstesten med samme rekka. Siden $0 < a_n = \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{n^2+\frac{1}{n}} < \frac{1}{n^2}$, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$. Integraltesten er også mulig, men arbeidsom.

For å undersøke rekka $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, la $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Da er $\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^{\infty} = \infty$, der integralet er beregnet ved variabelbytte $u = \ln x$. Altså divergerer $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ ved integraltesten.

Oppgave 6b

Fra formelsamlingen har en $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ for $|x| < 1$. Alternativt, har vi

$\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \int_0^x \frac{du}{1-(-u^2)}$. For $|x| < 1$ oppfyller integrasjonsvariablen u ulikheten

$|u| < 1$. Altså er $|-u^2| < 1$ for $|x| < 1$, og vi anvende formelen for summen til en geometrisk rekke. Slik at for $|x| < 1$ er

$\arctan x = \int_0^x \frac{du}{1-(-u^2)} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-u^2)^n \right) du = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n} \right) du$. For $|x| < 1$ kan vi bytte om rekkefølgen på summasjon og integrasjon. Altså har vi

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x u^{2n} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ for } |x| < 1.$$

Dette gir Taylorrekka

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \text{ for } |x| < 1.$$

Altså er

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\arctan x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{10}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{10^{2n+1} (2n+1)^2}.$$

Dette er en alternerende rekke, og vi løser ulikheten $\frac{1}{10^{2n+1}(2n+1)^2} < 10^{-8}$ for å bestemme antall ledd som er tilstrekkelig for ønsket presisjon. Ved inspeksjon ser vi at $n = 3$ er minste heltallsverdi som oppfyller ulikheten. Ved restestimat for alternerende rekke er altså

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\arctan x}{x} dx \approx \sum_{n=0}^{2} (-1)^n \frac{1}{10^{2n+1} (2n+1)^2} = 0.09988929,$$

med feil mindre enn 10^{-8}.

Oppgave 7a

Volumet til ballongen ved tiden t er $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$, og overflatearealet til ballongen er $A(t) = 4\pi r^2(t)$. Ballongen lekker med en rate på $kA(t)$, mens den fylles med raten $Q = 4\pi$ cm^3/min. Dette gir ligninga (massebalanse)

$$\frac{dV}{dt}(t) = Q - kA(t).$$

Vi har $\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r^2(t)\frac{dr}{dt}(t)$. Altså er

$$4\pi r^2(t)\frac{dr}{dt}(t) = 4\pi - k4\pi r^2(t).$$

Slik at for $0 < r(t) < 10$ kan dette skrives som

$$\left(\frac{r^2(t)}{r^2(t)-\frac{1}{k}}\right)\frac{dr}{dt}(t) = -k\ .$$

Vi setter $k = \frac{1}{100}$, som gir

$$\left(\frac{r^2(t)}{r^2(t)-100}\right)\frac{dr}{dt}(t) = -\frac{1}{100}. \qquad (*)$$

Polynomdivisjon gir $r^2 : (r^2 - 100) = 1 + \frac{100}{r^2 - 100}$.

Altså er

$$\left(1+\frac{100}{r^2-100}\right)\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{100}.$$

Denne oppgaven kan også løses uten polynomdivisjon ved å sette uttrykket i parentesen i det oppgitte svaret på fellesnevner og sammenligne med (*).

Oppgave 7b

Ligninga er separabel, og allerede på separert form. Dette gir

$$\int\left(1+\frac{100}{r^2-100}\right)dr = -\int\frac{dt}{100} \quad\Leftrightarrow\quad \int\left(1+\frac{100}{(r+10)(r-10)}\right)dr = -\frac{t}{100}+C \quad\Leftrightarrow$$

$$\int\left(1+5\left(\frac{1}{r-10}-\frac{1}{r+10}\right)\right)dr = -\frac{t}{100}+C \quad\Leftrightarrow\quad r-5\ln\left|\frac{r+10}{r-10}\right| = -\frac{t}{100}+C.$$

$r(0)=0$ gir $C=0$. Altså er løsninga $r(t)$ gitt implisitt ved

$$r(t)-5\ln\left|\frac{r(t)+10}{r(t)-10}\right| = -\frac{t}{100}.$$

For å finne t når $r(t)=5$, setter vi $r(t)=5$ i uttrykket over. Dette gir

$t=500(\ln 3-1)\approx 49.306$. Altså er $r=5\,\text{cm}$ ved tiden $t=500(\ln 3-1)$ min.