Konvergens/divergens

1) **<u>Divergenstesten</u>:** Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så er $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Dersom leddene a_n ikke går mot null, må altså rekken divergere.

NB! Husk at selv om $\lim_{x \to \infty} a_n = 0$, behøver <u>ikke</u> rekken divergere.

2) **<u>Korollar</u>:** Dersom en av de to rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergerer og den andre divergerer, så divergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n)$ og $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)$.

3) **<u>Setning</u>:** La $m > 0$. De to rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ vil enten begge konvergere eller begge divergere.

Positive rekker

<u>Definisjoner</u>: Positiv rekke: -rekker $\sum a_n$ der $a_n \geq 0 \quad \forall n$.

Begrenset: -dersom $\exists$M slik at $\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < M \quad \forall n$.

4) **<u>Setning</u>:** En positiv rekke konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset.

5) **<u>Integraltesten</u>:** Anta at $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ er en positiv, kontinuerlig og avtagende funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hvis og bare hvis integralet $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergerer.

6) **<u>Setning</u>:** Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer hvis og bare hvis p>1.

7) **<u>Sammenligningstesten</u>:** La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

i) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og at $\exists$ et tall c slik at $b_n \leq c a_n \quad \forall n$. Da konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

ii) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og at $\exists$ et positivt tall d slik at $b_n \geq da_n \quad \forall n$. Da divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

8) <u>Grensesammenligningstesten</u>: La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to positive rekker.

i) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$. Da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ii) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$. Da divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

9) <u>Forholdstesten</u>: La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke og anta at grensen $a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer.

Da gjelder:

i) Dersom a<1, konvergerer rekken.

ii) Dersom a>1, divergerer rekken.

iii) Dersom a=1, gir testen ingen konklusjon.

10) <u>Rottesten</u>: La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke og anta at grensen $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ eksisterer. Da gjelder:

i) Dersom a<1, konvergerer rekken.

ii) Dersom a>1, divergerer rekken.

iii) Dersom a=1, gir testen ingen konklusjon.

Alternerende rekker

11) <u>Test for alternerende rekker</u>: Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der størrelsen $|a_n|$ er avtagende ($|a_n| > |a_{n+1}|$) og går mot null. Da er rekken konvergent. Dersom $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ er den n'te delsummen, så er $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$, der s er summen til rekken.

12) Definisjon: Hvis vi sier at rekken $\sum a_n$ konvergerer absolutt dersom $\sum |a_n|$ konvergerer.

13) Setning: En absolutt konvergent rekke er alltid konvergent.

14) Definisjon: En konvergent rekke som ikke er absolutt konvergent, kalles betinget konvergent.

15) Forholdstesten for generelle rekker: La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke og anta at grensen $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$ eksisterer. Da gjelder:

i) Dersom a<1, konvergerer rekken absolutt.
ii) Dersom a>1, divergerer rekken.
iii) Dersom a=1, gir testen ingen konklusjon.

16) Rottesten for generelle rekker: La $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ være en rekke og anta at grensen $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = a$ eksisterer. Da gjelder:

i) Dersom a<1, konvergerer rekken absolutt.
ii) Dersom a>1, divergerer rekken.
iii) Dersom a=1, gir testen ingen konklusjon.