Induksjonsbevis

For å bevise at utsagnet $P(n)$ er riktig for alle $n \geq 1$, trenger vi å vise at

- $P(1)$ er riktig
- Hvis $P(k)$ er riktig, for en eller annen $k \geq 1$, så er $P(k+1)$ riktig.

Ved induksjonsprinsippet er da $P(n)$ riktig for alle $n \geq 1$.

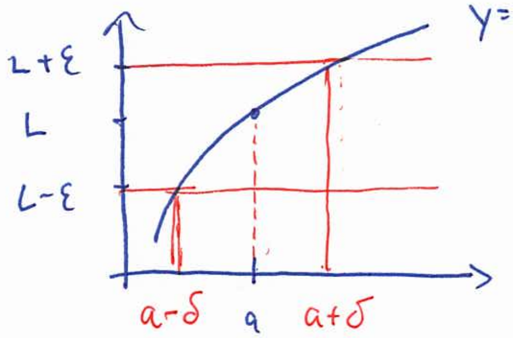
NB: ~~Ikke~~ Det er ikke alltid vi starter med 1. Vi kan ~~starte~~, avhengig av situasjonen, være nødt til å starte med $n=2$, f.eks. I så fall har vi vist at $P(n)$ ~~for~~ er riktig for alle $n \geq 2$.

Funksjoner (Kap. 1 og hele boken)

- Ulike typer funksjoner
  - polynomfunksjoner
  - rasjonale funk.
  - trigonometriske funksjoner
  - eksponentialfunksjoner — hyperbolske funk.
  - logaritmefunksjoner
- Inversfunksjoner
- grafer.
- God anledning til å være sikker på at du kjenner egenskaper ved trigonometriske funk. ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ o.l.), eksponential ($a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ o.l.) og logaritmefunksjoner ($\log_a x^y = y \log_a x$ etc.).

Grenseverdier – kontinuitet

- Definisjon av $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $(\varepsilon - \delta)$ (avsn. 2.3)



- Ensidige grenseverdier, (avsn. 2.4)
  uendelige grenseverdier, (avsn. 2.5)
  grenseverdier i uendelig (avsn. 2.4)

- Kontinuitet: f kont. i a hvis $a \in D_f$ og

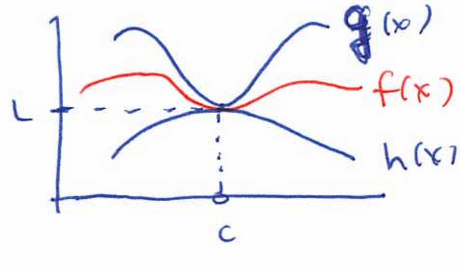
$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x). \quad \text{(avsn. 2.6)}$$

- Regneregler for grenseverdier:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) \\ &\quad\quad \| \\ &\lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to b} g(x) \end{aligned}\right\} \text{s. 91}$$

(hvis disse eksisterer!)

- Sandwich-teorem: (s. 69)



,

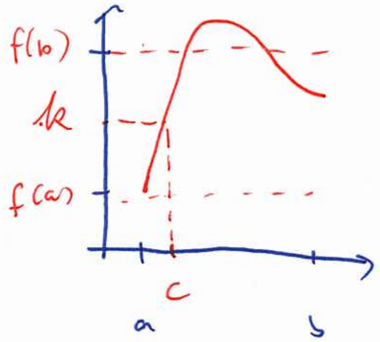
- L'Hôpitals regel: (avsn. 4.6)

  <u>NB</u>: kun for $\frac{0}{0}$ eller $\frac{\infty}{\infty}$ -uttrykk.

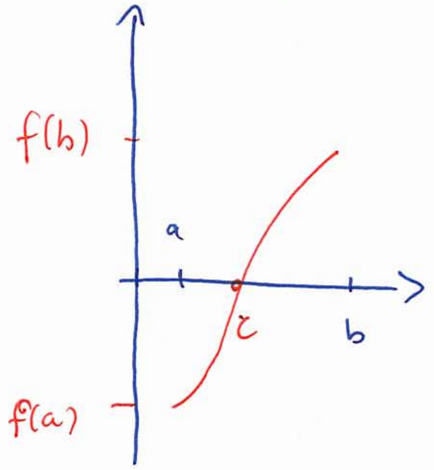
  Hvis uttrykk på formen $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^∞, ∞^0: <u>skriv om</u> på uttrykk.

Grenseverdier - kontinuitet

- Mellomverdisetningen / skjæringssetningen (s. 111)



$f(c) = k$



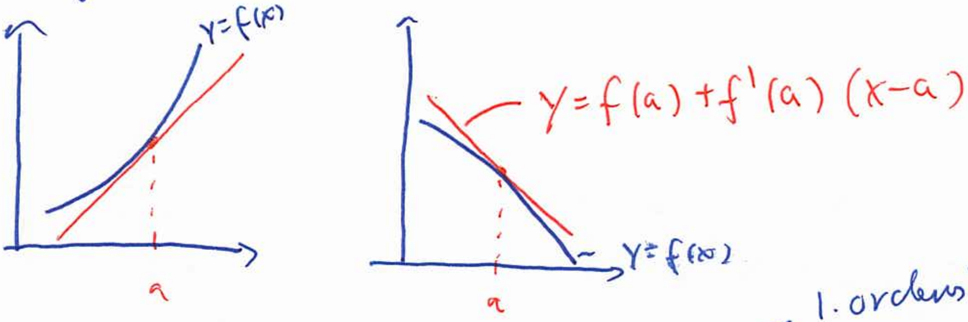
$f(c) = 0$

Derivasjon

(avsn. 2.7 og 3.1)

- $y = f(x)$: $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

- Tangentlinjer :

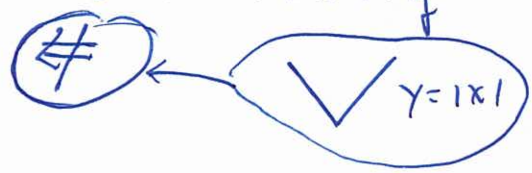


1. ordens Taylorpolynom.

- NB: $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$; samme som ligning for tang. linje til $y = f(x)$ i $x = a$.

- "Derivasjonsregler" skal sitte i fingrene! (avsn 3.2, 3.4, 3.5)

- Deriverbar $\Rightarrow$ kontinuerlig



- Endringsrater : $v(t) = \frac{ds}{dt}$, $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ o.l. (avsn 3.3)

- Parameterkurver $x = f(t)$, $y = g(t)$ (avsn. 3.5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

- Implisitt derivasjon. (avsn. 3.6) $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ ..

- Deriverte av omvendte funksjoner : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ (avsn. 3.7 .

Derivasjon

(avsn. 3.8)

- Husk spesielt: $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

disse to dukker ofte opp i forb. med integrasjon!

$\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0.)$ (~~avsn. 3.8~~)

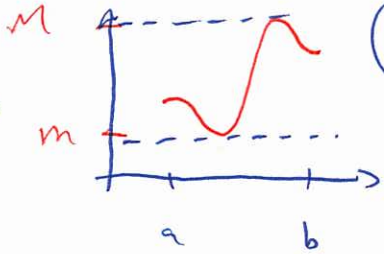
$\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{\ln a \cdot x}$ $\left(\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a},\ a>0,\ a\neq 1\right)$

(avsn. 3.7)

- Koblede hastigheter (tegn figur!) (avsn. 3.9)

- Maks / min:

  - Ekstremalverdisetningen

  (avsn. 4.1)

  („kont. f på $[a,b]$ har maks. M og min m.")

  - (Lokale) maks/min - verdier finnes i $\begin{cases}\text{kritiske pkt} \\ \text{evt. endepkt}\end{cases}$

  - Drøft fortegnet til f' eller bruk annenderivertest til å avgjøre maks/min!

- Monotoniegenskaper: (avsnitt 4.3)

  - Om f deriverbar ~~til~~: $f'(x)>0 \Rightarrow f$ voksende

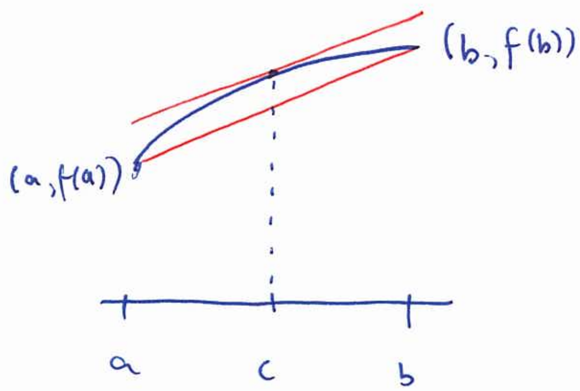
    $f'(x)<0 \Rightarrow f$ avtagende.

- Konkavitet - vendepunkt - drøfte funksjoner.
  (avsnitt 4.4)

Derivasjon

- Sekantsetningen / middelverdisetningen:

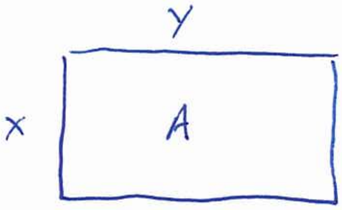
(avsn. 4.2)



(Viktig ~~[illegible]~~ bl.a. for å forstå mange av ~~[illegible]~~ teoremene om $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ voksende, etc.)

- Optimeringsproblemer: „når blir f.eks. areal / volum / lengde størst eller minst". (avsnitt 4.5)

– essensielt i finn maks/min



Eks: $x + y = 0$ (fast).

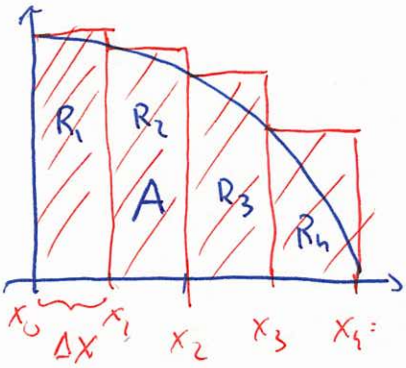
~~[illegible]~~

Hva er den største verdien A kan ha?

- Antiderivasjon → analysens fundamental-setning. (Avsn. 5.4)
(avsn. 4.8)

Integraler og integrasjon

- Estimering av areal v.h.a. endelige summer (avsn. 5.1) Jmfr. numeriske integrasjonsmetoder.



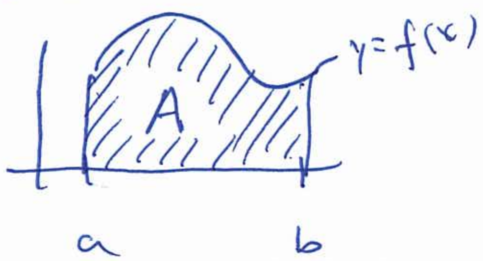
$$A < \sum_{i=1}^{4} R_i$$

$$\left(A \approx \sum_{i=1}^{4} R_i\right)$$

- Viktig fordi vi bruker tenkemåten til å sette opp Riemann-summer for: areal, volum, buelengde, arbeid, massesenter.
- Riemannsummer og „grenseverdier for summer" (avsn. 5.2)
- Bestemt integral (avsn. 5.3)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \quad ; \text{ For alle } \varepsilon > 0 \text{ fins } \delta > 0$$

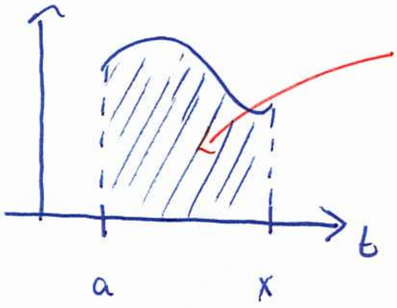
- f kont. $\Rightarrow$ f integrerbar (s.334)
- Definisjon av areal:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

• Den store sammenhengen mellom derivasjon og integrasjon:

Analysens fundamentalsetning. (avsn. 5.4)

I) 

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, f kont. i [a,b]

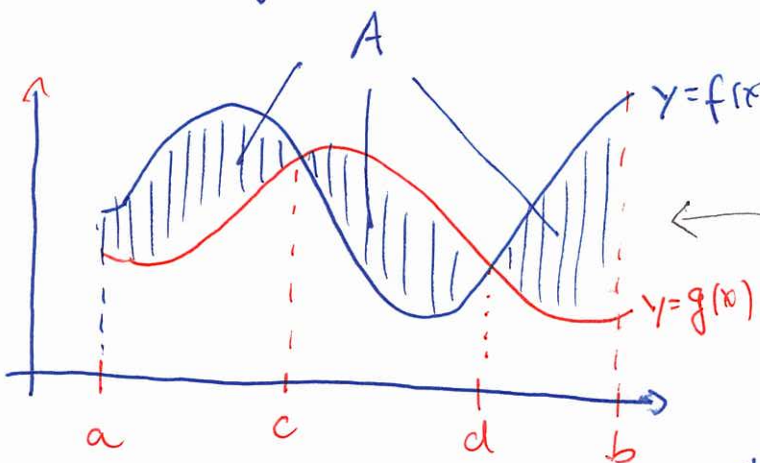
F(x) derivbar i [a,b], og
$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. (s. 346)

II) (s. 348) f kont. i [a,b], og F er hvilken som helst antiderivert av f i [a,b].

Da er $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Kan m.a.o. ~~integrere~~ finne bestemt integral ved å antiderivere (hvis funk. er kont.)

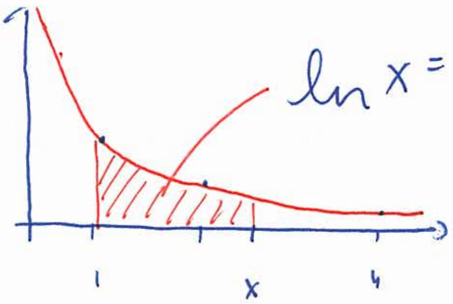
• Areal avgrenset av to kurver: (Avsn. 5.6)



$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ (i alle tilfeller!)

$= \int_a^c (f(x)-g(x))\,dx + \int_c^d (g(x)-f(x))\,dx + \int_d^b (f(x)-g(x))\,dx$.

- Logaritmefunksjonen som integral : (avsn. 5.7)

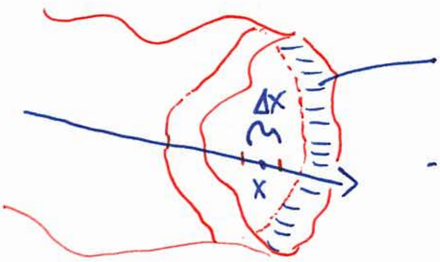


$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,, \quad x>0.$$

„ $\exp(x) = e^x$ inversen til $\ln x$."

- Volumberegninger :

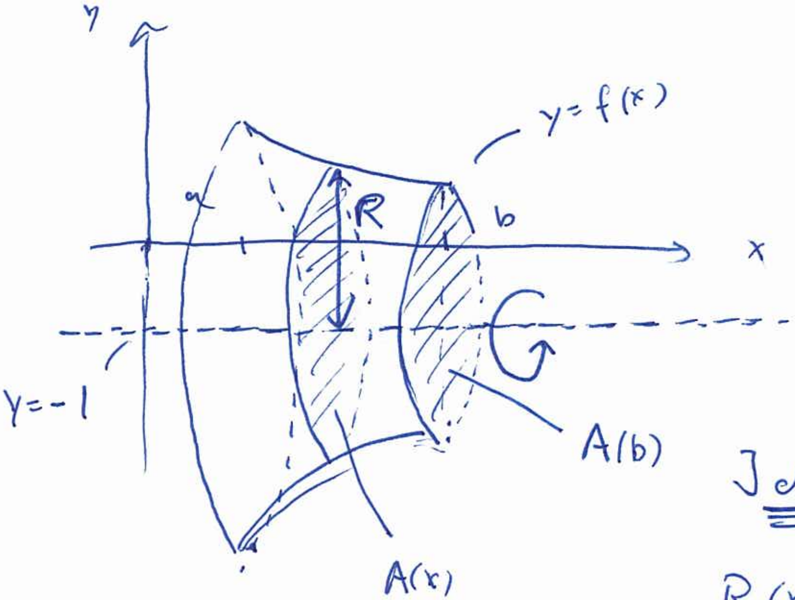
Skivemetoden („volumes by slicing") (avsn. 6.1)



$$\Delta V = A\,\Delta x$$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Rotasjonslegemer v. skivemetoden : (6.1)



~~$A(x) = \pi R(x)^2$~~

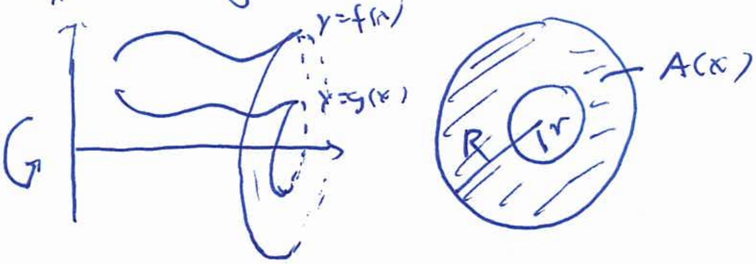
$$A(x) = \pi (R(x))^2$$

$$V = \int_a^b \pi (R(x))^2\,dx$$

I dette tilfellet :

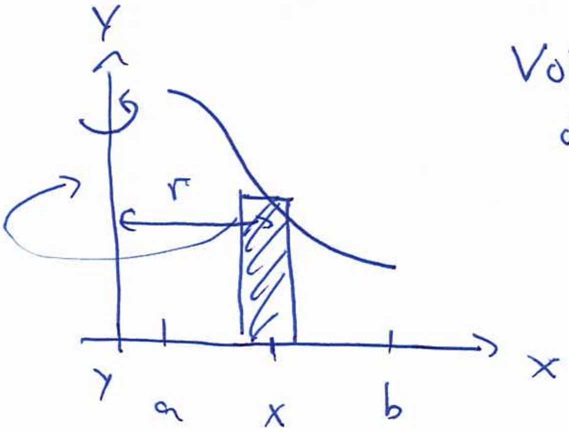
$$R(x) = f(x) - (-1) = f(x) + 1$$

„Kronestykker"

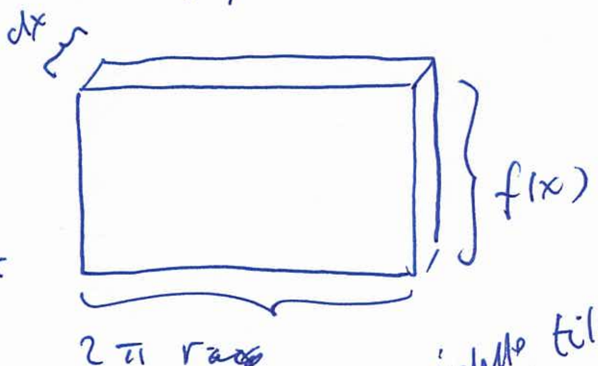


$$V = \int_a^b \pi \left((R(x))^2 - (r(x))^2 \right) dx.$$

Sylinderskallmetoden (avsn. 6.2)



Volum av „sylinder":



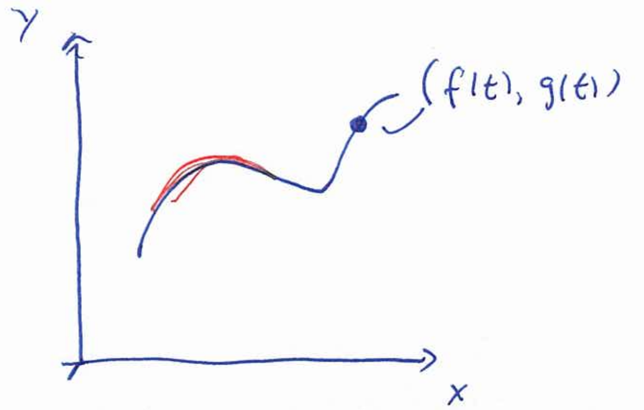
$$V = \int_a^b 2\pi\, r\, f(x)\, dx \quad \left(= \int_a^b 2\pi\, x\, f(x)\, dx \right)$$

i dette tilf.

NB Ikke pugg formler, men forstå ~~hvordan~~ hvorfor og hvordan integralene blir som de blir i hvert tilfelle.

NB Husk: roter om x-akse, y-akse, andre akser! Aldri „helt" samme situasjon.

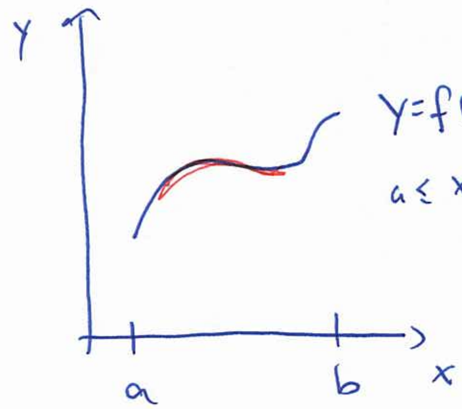
• Buelengde og overflateareal



$x = f(t)$, $y = g(t)$ (kont!)

$a \le t \le b$:

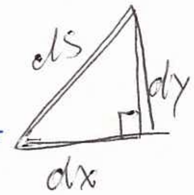
$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt.$$



$y = f(x)$

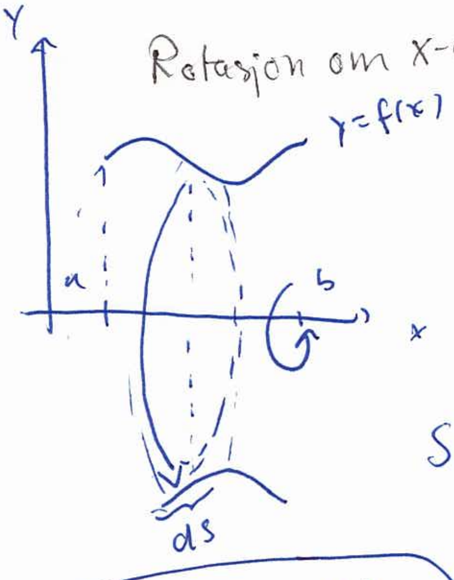
$a \le x \le b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



(avsnitt 6.3)

Rotasjon om x-akse:



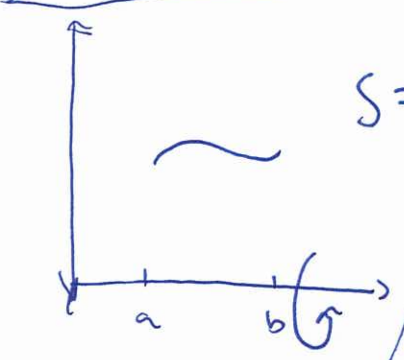
Areal som dannes blir: (avsn. 6.4)

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

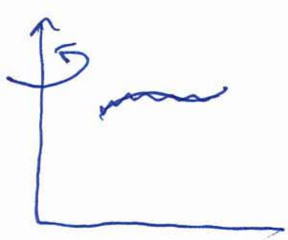
(s. 416)

Se også s. 417 for rot om y-akse.

$x = f(t)$, $y = g(t)$



$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$



$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

- **Arbeid** – Konstant kraft ~~over~~ F over avstand d:

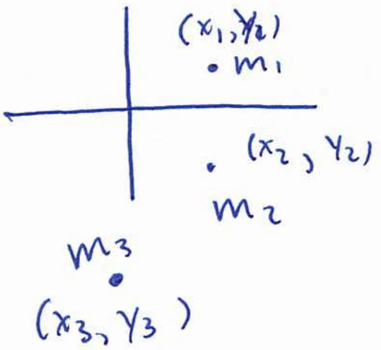
$$W = F \cdot d$$

– Variabel kraft ~~F over avstand~~ F(x) i bevegelses-retning fra $x=a$ til $x=b$:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx \qquad \text{(Avsnitt 6.6)}$$

(F. eks Hookes lov: $F(x) = k \cdot x$)

- **Massesenter** (avsnitt 6.7)



Endelig mange „punktmasser" i planet:

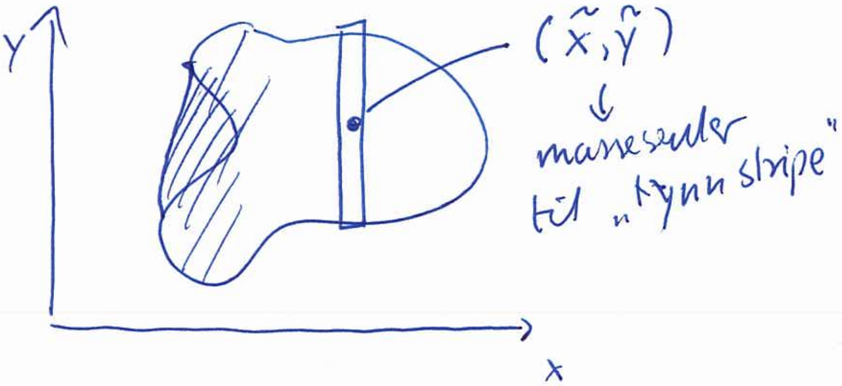
massesenter er $(\bar{x}, \bar{y})$, der

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}.$$

moment om y-akse

moment om x-akse.

Tynn, flat plate i planet:



Moment om y-akse:

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm$$

Moment om x-akse:

$$M_x = \int \tilde{y}\,dm$$

Total masse: $M = \int dm.$

Massesenter $(\bar{x}, \bar{y})$, der $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$.

- Integrasjonsteknikker:

- Substitusjon: (avsn. 5.5)

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \overset{u=g(x)}{=} \int f(u)\,du$$

- Trigonometriske substitusjoner (avsn. 7.3)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \overset{x = a\sin\theta}{=} \int a|\cos\theta|\cdot a\cdot\cos\theta\,d\theta = \ldots\ldots$$

$x = a\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$

- Delvis integrasjon: $\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$

(avsn. 7.1)

- Trigonometriske integral: $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ etc.

... (avsn. 7.2)

- Delbrøkoppspaltning

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2(x-1)(x+1)^2}\,dx =$$

$$\int \left\{ \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} \right\} dx$$

- Uegentlige integral (avsn. 7.7)

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\substack{\text{vanlig,}\\ \text{bestemt}\\ \text{integral.}}}$$

Om f diskont. i b:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Integralet <u>konvergerer</u> om grenseverdien finnes.

- aktuelt i forbindelse med rekker (integraltesten, avsn. 8.3)
- sammenligningstester for integral. s 493–494. (jmfr. sammenligningstester for rekker)

Rekker og følger

- Følge: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (avsn. 8.1)
  (uendelig) samling tall i bestemt rekkefølge.
  (egentlig funksjon f, $D_f = \mathbb{N} \ldots$).
  - rekursivt definerte følger $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (f.eks.)
  - eksplisitt: $a_n = f(n)$

- Konvergens: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. (ε-N def. ..s. 504)

eller divergens

- Regneregler for å finne grenseverdier for følger:
  - summer, produkter, sandwich, L'Hôpital etc.
    s. 506-508.

- Noen viktige følger på s. 509.

- <u>Viktig setning</u>: (S. 511)

> En ikke-avtagende følge av reelle tall konvergerer hvis og bare hvis den har en øvre skranke / er begrenset ovenfra.

Viktig <u>bl. a.</u> fordi dette brukes i bevis for alle konvergenstestene for <u>rekker</u>.

- Rekke : Uendelig sum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (avsn. 8.2)

- Viktig: delsum nr. k: (sum av k første ledd)

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

- Rekken ~~konv~~ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer hvis følgen $\{S_k\}$ konvergerer som følge.

- ~~[illegible]~~ Geometrisk rekke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + ar + ar^2 + \dots$$

$$S_k = a \cdot \frac{1 - r^k}{1 - r} = a + ar + \dots + ar^{k-1}$$

Hvis $|r| < 1$: konvergerer.

Ellers: divergerer.

- Regneregler for rekker: s. 520

- Alternerende rekker (avsn. 8.6)

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

($u_n \geq 0$).

- Absolutt og betinget konvergens (avsn. 8.6)

- ~~Potensrekker~~

Tester for konvergens / divergens

- n'te leddstesten: hvis $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ eller ikke finnes, så divergerer $\sum a_n$. (s. 519)

- integraltesten (s. 525, avsn. 8.3)
  - NB: p-rekker: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
  - rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGERER.
  - estimat for rest R_k s. 527.

- sammenligningstesten (s. 529, avsn. 8.4)

- grensesammenligningstesten (s. 530, avsn. 8.4)

- forholdstesten (s. 533, avsn. ~~8.6~~ 8.5)

- rottesten (s. 535, avsn. 8.5)

- test for alternerende rekker (s. 538, avsn. 8.6)
  - estimat for rest: $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$

    $|S - S_n| \leq u_{n+1}$

- Potensrekker (avsn. 8.7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

koeffisientene

- Konvergensradius og konvergensintervall (s. 548)

- ~~Konvergente po~~ Potensrekker „kan deriveres/integreres i konvergensintervallet"!
  - Gjøres ved leddvis derivasjon/integrasjon. (s. 549–550)

- Taylor- og Maclaurinrekker (avsn. 8.8).

  Taylor: til f om a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

~~Maclaurinrekke~~ Maclaurinrekke til f

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ (egentlig bare Taylor for $a=0$)

- NB: Om $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, i et ~~...~~ intervall!

  så må denne rekken være Taylor-rekken til f!

- Taylor- og Maclaurinpolynom (s. 556)
- Taylorsformel (avsn. 8.9, s. 559–560)
    - spesielt restleddet!
- Restleddsestimat (s. 561)
- Binomialrekker (8.10)

Differensiallligninger og initialverdiproblemer

- To løsningsmetoder ~~[illegible]~~
  - Separable diff. lign: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot H(y)$. (avsn. 6-5)
  - Første ordens lineære diff. lign:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x) \qquad \text{(avsn. 15.2)}.$$

- Initverdiproblem: ligning med $y(x_0) = y_0$.
  ~~[illegible]~~ f.eks. $y(0)=1$.
- Eksistens og entydighet av løsninger: (avsn. 15.1)

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- Picards iterasjonsmetode (avsn. 15.1):

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_n(t))\, dt.$$

- Eulers metode (avsn. 15.4) (finner kun tilnærmede verdier av y, ... finner ikke funksjon).

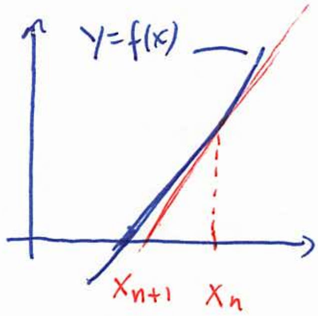
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x.$$

(Også under numeriske metoder)

Numeriske metoder

Avsnitt 4.7

- Newtons metode: tilnærmer løsning av $f(x)=0$:



Start: x_0,

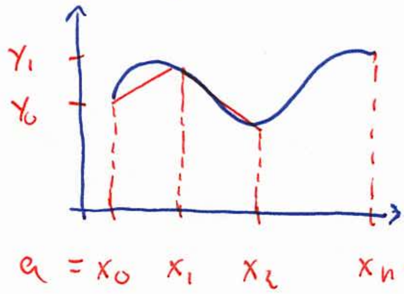
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0$$

(Iterasjonsmetode.)

Kan bl.a. knyttes til: derivasjon, tangentlinje, eksistens av løsninger.

- Numeriske integrasjonsmetoder (Avsn. 7.6)

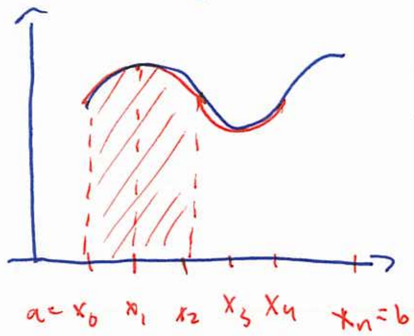
- Trapesmetoden: $I \approx \frac{\Delta x}{2}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n\}$.



Feil: $|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$,

M s.a. $|f''(x)| \leq M$ for alle $x \in [a,b]$.

- Simpsons regel: NB: n = partall



$$I \approx \frac{\Delta x}{3}\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\}$$

Feil: $|E_S| \leq \frac{M \cdot (b-a)^5}{180n^4}$,

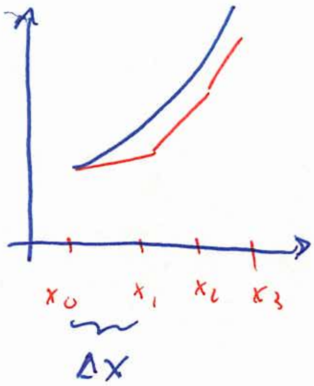
M s.a. $|f^{(4)}(x)| \leq M$ for alle $x \in [a,b]$.

Rottmann s. 174, Boh s. 479–481.

Numeriske metoder

- Eulers metode (Avsn. 15.4)

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, Finner ~~tilnærming til y(x~~ tilnærmet verdi til y i et pkt.



$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x.$$

Kan knyttes til i differensialligninger.