1. Funksjoner

- Funksjoner og grafer.
- Noen typer funksjoner
  - lineære funk: $f(x) = ax + b$ (Oppg. 1, prøvesemester)
  - polynomfunk: $f(x) = 5x^6 - 2x + \pi$
  - rasjonale funk: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q pol.
  - trigonometriske funk. (Oppg. 2, prøvesemester) ((Oppg. 8
  - e^x, $\ln x$ (Oppg. 10, prøvesemester)
  - hyperbolske funk. (egentlig 3.11)

    $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Omvendte funksjoner

  $f^{-1}(x)\ldots$

- Induksjonsbevis
- Polynomdivisjon

2. Grenseverdier og kontinuitet

- Grenseverdier
  - presis definisjon ($\varepsilon - \delta$)
  - regneregler — sandwich teorem
    - L'Hôpital (4.6)
  - ensidige grenseverdier
  - grenseverdier i ∞ — asymptoter
  - uendelige grenseverdier — asymptoter

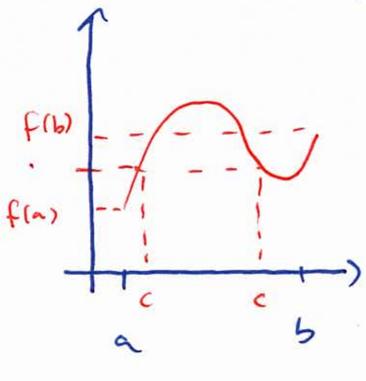
    (Oppg. 5, prøvesemester)

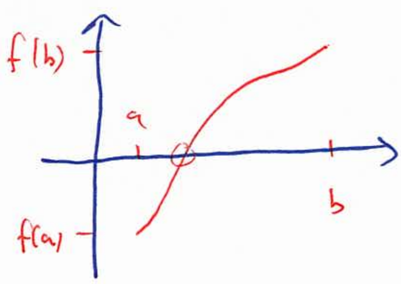
- Kontinuitet - f kont. i c hvis $c \in D_f$

  og $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

  (Høyre- venstre kont.)

- Mellomverdisetningen / Skjæringssetningen (Oppg. 5, prøvesemester)



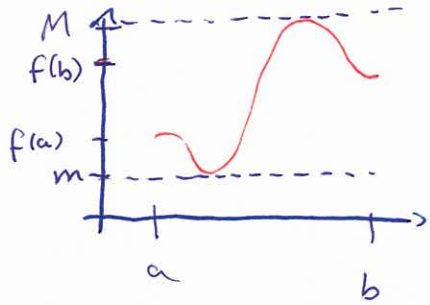


3. Den deriverte

- $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ Oppg. 9 prøvesemester.
- Ikke glem tangentlinjer!!!
- derivasjonsregler — summer — produktregel — kvotientregel — kjerneregel
- deriverbarhet $\Rightarrow$ kontinuitet
  $\not\Leftarrow$
- Endringsrater: $v(t) = \frac{ds}{dt}$, $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ o.l.
- Parameterkurver: $x = f(t)$, $y = g(t)$
  $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
- Implisitt derivasjon Oppgave 6, prøvesemester
  $$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
- Deriverte av omvendte funksjoner
  NB: $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x$, $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x$ etc.
- Koblede hastigheter
- Linearisering: $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

4. Anvendelser av derivasjon

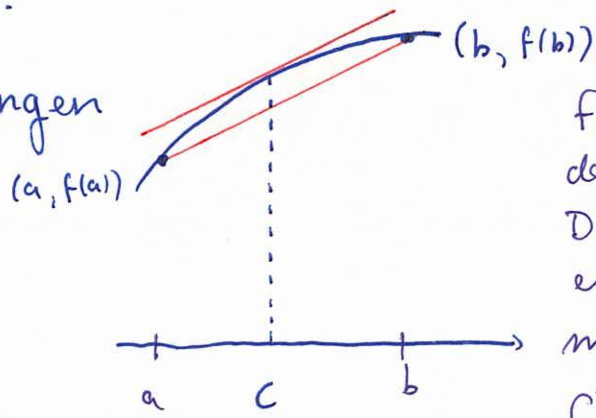
- Ekstremalverdisetningen



- (Lokale) maks/min-verdier
  - finnes i { kritiskpkt / evt. endepkt.
  - drøft fortegn!

Men husk: ikke alle kritiske pkt. gir maks/min verdi!

- Middelverdisetningen



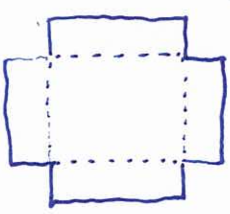
f kont. i $[a,b]$, deriverbar i (a,b). Da finnes (minst) en c i (a,b) med

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- Voksende og avtagende funksjoner
  - kan se på $f'(x)>0$, $f'(x)<0$ for deriverbar f.

- Konkavitet - vendepkt. - skissere/drøfte funksjoner graf
  - kan se på f'' om f to gg. deriverbar
  (Drøfte fortegn for V.P.)

- Optimeringsoppgaver

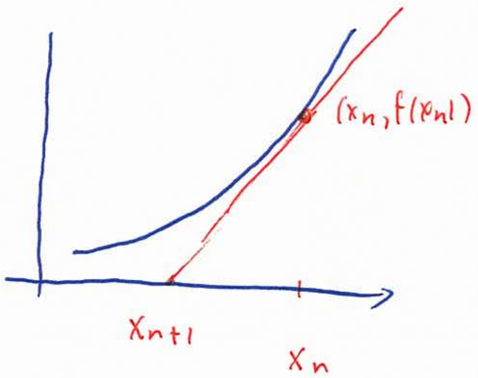


  - essensielt: finn maks/min.
  - vanskelighet: finn riktig funksjon.

- L'Hôpitals regel – kun på „$\frac{\infty}{\infty}$" og „$\frac{0}{0}$"-uttrykk
  - kan ofte skrive om „$0 \cdot \infty$", „$\infty - \infty$", „0^{∞}", „1^{∞}", „∞^{0}" til „$\frac{0}{0}$" eller „$\frac{\infty}{\infty}$"-form.

Tar eksempel under analysens fund. setning!

- Newtons metode



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0.$$

(• Antideriverte
  - mye av dette ellers i ~~boka~~ kurset.)

5. Integrasjon

- Estimater m/endelige summer
- Riemannsummer og „grenseverdier for summer"
- Bestemt integral: $\int_a^b f(x)\,dx$ (Oppgave 7, prøvesemester)
- Analysens fund. setn.

  i) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

  (Hvis f er kont.!)

  ii) F antiderivert av f:

  $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Eksempel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\sin x} \quad \frac{0}{0}$$

$= $ L.H + fund. setn!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)}{\frac{d}{dx}\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}}{\cos x} = 1.$$

- Substitusjon

  (Oppg. 8, prøvesemester)

- Areal mellom kurver/grafer

- Logaritmen $\ln x$ som integral

6. Anvendelser av best. integral

- Volum
  - skivemetoden
  - omdreiningslegemer
  - sylinderskall (Oppg. 7, prøvesemester)
- Buelengde $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b,$

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

- Overflateareal til omdreinings-legemer

- Separable differensialligninger

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\, g(x), \quad \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\, dx$$

- Arbeid
  - $W = \int_a^b F(x)\, dx$
  - Hookes lov.

- Moment og massesenter