Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fasit TMA4100
19-12-2007

1

1 **a)** Vi faktoriserer og får

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3} = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}.$$

b) Vi bruker l'Hopital's regel og får følgende regning:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x+\sqrt{\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1+\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}(1/x)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}} = 0.$$

2 **a)** La $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{n})^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ der $a_n(x) = (\frac{x}{n})^n$. Vi bruker rot-kriteriet: Sett

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}(a_n(x))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n} = 0$$

Siden $\rho(x) = 0 < 1$ for alle $x \in \mathbf{R}$ følger det at $P(x)$ er konvergent for alle $x \in \mathbf{R}$.

3 **a)** La V betegne volumet til rotasjons legemet. Vi bruker sylindriske skjell metoden og får

$$V = \int_0^1 A(y)dy$$

der $A(y)$ er arealet av området som fremkommer når vi roterer linjen mellom punktene $(y, \sqrt{y})$ og $(y, -\sqrt{y})$ om linjen $y = 2$. Vi får

$$A(y) = 2\sqrt{y}(2\pi(2-y)) = 4\pi(2y^{1/2} - y^{3/2}).$$

Vi beregner V:

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 4\pi(2y^{1/2} - y^{3/2})dy = 4\pi[\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}]_0^1 =$$

$$4\pi[4/3 - 2/5] = \frac{56\pi}{15}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi bruker Euler's metode med $x_0 = y_0 = 0$, $dx = 1/3$, $x_n = x_0 + ndx$ samt

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)dx$$

der $f(x, y) = 3xy + 1$. Vi får

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)dx =$$

$$0 + f(0, 1/3)(1/3) = \frac{1}{3}$$

og

$$x_1 = x_0 + dx = \frac{1}{3}.$$

Videre regning gir

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)dx =$$

$$\frac{1}{3} + f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} + (\frac{1}{3} + 1)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$$

og

$$x_2 = x_1 + dx = \frac{2}{3}.$$

Vi får

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)dx = \frac{7}{9} + f(\frac{2}{3}, \frac{7}{9}) = \cdots = \frac{44}{27}.$$

Svar: $y(1) \cong \frac{44}{27}$.

$\boxed{5}$ **a)**

b) Vi beregner $f''(x)$:

$$f'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))$$

og

$$f''(x) = \sin(x)\sin(\sin(x)) - \cos^2(x)\cos(\sin(x)).$$

Vi bruker triangel ulikheten $|a + b| \leq |a| + |b|$ og får

$$|f''(x)| \leq |\sin(x)\sin(\sin(x))| + |\cos^2(x)\cos(\sin(x))| \leq$$

$$|\sin(x)||\sin(\sin(x))| + |\cos^2(x)||\cos(\sin(x))| \leq 1 + 1 = 2.$$

c) Velg $M_2 = 2$. Vi bruker trapes metoden og får følgende:

$$\int_0^1 f(x)dx = T_n + E_n$$

der

$$|E_n| \leq \frac{M_2(1-0)^3}{12n^2} = \frac{2}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} \leq 0.01.$$

Om vi velger $n \geq 5$ følger det at $|E_n| \leq 0.01$. Vi har at

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

der $\Delta x = (b-a)/n = 1/n = 1/5$, $x_i = a + i\Delta x = 1 + \frac{i}{5}$ og $y_i = f(x_i)$. Vi får

$$T_5 = \frac{1}{10}(f(0) + 2f(1/5) + 2f(2/5) + 2f(3/5) + 2f(4/5) + f(1)) =$$

$$\frac{1}{10}(1 + 1.96066 + 1.85026 + 1.68956 + 1.50709 + 0.66637) = 0.86739.$$

Svar: $\int_0^1 f(x)dx = 0.87$.

$\boxed{6}$ **a)** Ligningen

$$\frac{dB}{dt} = \frac{3}{10}B - r$$

er separabel. Vi separerer variablene og integrerer:

$$\frac{1}{\frac{3}{10}B - r}dB = dt$$

$$\frac{1}{B - \frac{10}{3}r}dB = \frac{3}{10}dt$$

$$\int \frac{1}{B - \frac{10}{3}r}dB = \int \frac{3}{10}dt$$

som gir ligningen

$$\ln|B - \frac{10}{3}r| = \frac{3}{10}t + C$$

der $C \in \mathbf{R}$. Vi får

$$|B - \frac{10}{3}r| = e^{\frac{3}{10}t + C} = De^{\frac{3}{10}t}$$

der $D > 0$. Dette gir

$$B(t) = \frac{10}{3}r + Ee^{\frac{3}{10}t}$$

med $E \in \mathbf{R}$. $B(0) = 50$ gir at $E = 50 - \frac{10}{3}r$ og vi får da løsningen

$$B(t) = \frac{10}{3}r + (50 - \frac{10}{3}r)e^{\frac{3}{10}t}.$$

For at $B(t)$ skal være konstant ser vi at følgende må holde:

$$50 - \frac{10}{3}r = 0$$

som gir

$$r = 15.$$

b) Anta at $r > 15$. $B(t) = 0$ gir ligningen

$$\frac{10}{3}r + (50 - \frac{10}{3}r)e^{\frac{3}{10}t} = 0.$$

Vi får

$$\frac{150 - 10r}{3}e^{\frac{3}{10}t} = -\frac{10r}{3}$$

$$\frac{10r - 150}{3}e^{\frac{3}{10}t} = \frac{10r}{3}$$

$$e^{\frac{3}{10}t} = \frac{10r/3}{(10r-150)/3} = \frac{10r}{10r-150}.$$

Dette gir

$$\frac{3}{10}t = \ln\left|\frac{10r}{10r-150}\right|$$

og vi får

$$t = \frac{10}{3}\ln\left|\frac{r}{r-15}\right|.$$

$\boxed{7}$ **a)** Et punkt P på grafen til $y(t)$ der $a \in (0, \sqrt{3})$ er gitt ved

$$P = (a, y(a)) = (a, 2\sqrt{3-a^2}).$$

Ligningen til tangenten L til grafen $y(t)$ i punktet P er gitt ved

$$L(x) = y(a) + y'(a)(x-a).$$

Vi ser at

$$y'(t) = \frac{-2t}{\sqrt{3-t^2}}.$$

Vi får at

$$L(x) = 2\sqrt{3-a^2} - \frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(x-a)$$

er en likning for tangenten $L(x)$ i punktet $(a, y(a))$. Vi beregner punktene $(A, 0)$ og $(0, B)$ der tangenten $L(x)$ skjærer x-aksen og y-aksen. y-aksen:

$$B = L(0) = 2\sqrt{3-a^2} - \frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(-a) = \cdots = \frac{6}{\sqrt{3-a^2}}.$$

x-aksen:

$$L(x) = 0$$

gir ligningen

$$0 = 2\sqrt{3-a^2} - \frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(x-a)$$

$$\frac{2a}{\sqrt{3-a^2}}(x-a) = 2\sqrt{3-a^2}$$

som gir

$$x - a = \frac{3-a^2}{a}.$$

Vi får punktet

$$A = a + \frac{3-a^2}{a} = \frac{3}{a}$$

som er punktet der L skjærer x-aksen. Kvadratet av avstanden d mellom A og B som en funksjon av $a = t$ er gitt ved

$$D(t) = A^2 + B^2 = (\frac{3}{t})^2 + (\frac{6}{\sqrt{3-t^2}})^2 = \frac{9}{t^2} + \frac{36}{3-t^2} =$$

$$27\frac{1+t^2}{3t^2-t^4}$$

(å minimere d^2 er ekvivalent med å minimere d). Vi deriverer (mhp. t) og får

$$D'(t) = \frac{2t(3t^2 - t^4) - (1 + t^2)(6t - 4t^3)}{t^4(3 - t^2)^2} = \cdots =$$

$$2\frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^3(3 - t^2)^2} = 2\frac{(t^2 - 1)(t^2 + 3)}{t^3(3 - t^2)^2}.$$

Vi ser at $D'(t) = 0$ om $t = \pm 1$ og $t = 1$ er løsningen på intervallet $I = (0, \sqrt{3})$. Vi får

$$d(1) = \sqrt{D(1)} = \sqrt{27} \cong 5.2.$$

Dvs. stigen må minst være 5.2 meter lang.