



Norges teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100
Høsten 2007

Kommentarer til eksamen

Dette dokumentet er en oppsummering av erfaringene fra sensuren av eksamen i TMA4100 Matematikk 1 Høsten 2007. For hver av oppgavene vil jeg kommentere løsningsmetodene, og jeg vil trekke frem typiske feil og misforståelser blant kandidatene som tok denne eksamenen. Håper dette dokumentet vil være til nytte for kandidater som ønsker å lære av den eksamenen de nettopp har tatt, og at dokumentet vil være til glede for kommende studenter og forelesere.

Karakterstatistikken for TMA4100 H07 er som følger:

	Totalt
Antall kandidater oppmeldt	1513
Antall møtt til eksamen	1421
Antall bestått	1128
Antall stryk	247
Antall avbrutt	46
% stryk og avbrutt	21%

Blant kandidatene som bestod var det følgende karakterfordeling:

Karakter	Antall	%	Kum.%
A	81	7,2 %	7,2 %
B	196	17,4 %	24,6 %
C	401	35,5 %	60,1 %
D	248	22,0 %	82,1 %
E	202	17,9 %	100,0 %

Ved sensureringen ble det gitt poeng på de ulike oppgavene. Gjennomsnittlig score blant kandidatene ble slik:

Oppg 1i)	Oppg 1ii)	Oppg 2	Oppg 3	Oppg 4	Oppg 5	Oppg 6a)	Oppg 6b)	Oppg 7
97 %	76 %	42 %	63 %	67 %	66 %	79 %	41 %	23 %

- 1 **Grenseverdier:** I denne oppgaven skulle man bestemme to grenseverdier. Den første var svært lett: Enten kunne man bruke l'Hôpital's regel en gang, og deretter sette inn $x = 2$, eller man kunne faktorisere telleren $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ og forkorte brøken.

Den andre grenseverdien, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x + \sqrt{\ln x}}$, var også lett. Standard fremgangsmåte var ved bruk av l'Hopitals regel, som gav

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1 + \frac{1}{2(\sqrt{\ln x}) \cdot x}} = \frac{0}{1 + 0}.$$

Endel kandidater observerte ikke at dette uttrykket gikk mot 0, og de forenklet uttrykket og brukte l'Hopitals regel flere ganger. Mange av disse kom også frem til riktig svar, mens andre gjorde regnefeil i denne beregningen.

En annen fremgangsmåte, brukt av en håndfull kandidater, var å skrive om grenseverdien til formen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{\sqrt{\ln x}}{x}}.$$

Deretter kan man si at følgende grenseverdier er kjent $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = 0$. Dette gir at grensen over er $\frac{0}{1+0}$. Ved bruk av denne fremgangsmåten forventet sensorene at kandidaten skulle skrive en setning som kommenterte de kjente grenseverdiene.

En siste fremgangsmåte, enda sjeldnere enn den over, var å bruke ulikheten

$$0 < \frac{\ln x}{x + \sqrt{\ln x}} < \frac{\ln x}{x}$$

sammen med skviseloven.

- 2 Potensrekke:** Kandidatene skulle finne de verdiene av x hvor potensrekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ konvergerer. Oppgaven er en standardoppgave med potensrekker, og burde derfor ikke vært vanskelig. Derfor kom det som en overraskelse på sensorene at så få kandidater hadde fått til oppgaven. Gjennomsnittscore var 42%.

Når man løser denne oppgaven skal man tenke på x som en konstant og så anvende en passende konvergenstest for rekker.

Den enkleste fremgangsmåten er å bruke rot-kriteriet for å sjekke absolutt konvergens. Husk at absolutt konvergens medfører konvergens. Den grenseverdien man da skal undersøke er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n}.$$

Siden x er konstant, er grensen 0 og rekken konvergerer (uansett hva konstanten x måtte være).

Mange kandidater hadde glemte å sette på absoluttverditegn, og de ble trukket for det. Det var også en gjennomgående feil at kandidaten ikke tenkte på x som konstant i grensen over. Kanskje tenkte kandidatene at " x kunne gå raskere mot uendelig enn n "? Dette er en misforståelse. Som poengtert over skal man tenke på x som konstant, og deretter anvende en konvergenstest.

Endel av disse kandidatene svarte at "rekken konvergerer dersom $|x| < n$ ". Dette svaret gir ikke noen mening; indeksvariabelen n har nemlig ingen uavhengig betydning.

Alternativt kunne man bruke forholdstesten for å undersøke konvergens av rekken. I så fall skulle man sette opp grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{|x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ er 0, men dette er ikke helt enkelt å se! Egentlig burde man beregne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ i en mellomregning. Konklusjonen er den samme som over. Grenseverdien er 0 og rekken konvergerer for alle x .

En vanlig feil, ved bruk av forholdstesten, var å sette opp grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{|x|^n}.$$

Grunntallet i potensen n^{n+1} i første nevner skal være $(n+1)$ i stedet for n .

En annen vanlig feil var at kandidaten tippet at grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ ble 1. Dermed kom kandidaten (feilaktig) frem til at konvergensradien var 1, og videre sjekket hun endepunktene $x = \pm 1$.

En annen måte å løse oppgaven på er å bruke grensesammenligningstesten opp mot rekken $\sum_n \frac{1}{n^2}$.

En elegant løsning er som følger: Fikser x . Velg et heltall $N > |x|$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ konvergerer hvis og bare hvis $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ konvergerer. For $n \geq N$ er $\frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|}{N} < 1$. Den geometriske rekken $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{x}{N}\right)^n$ konvergerer, og ved sammenligningstesten konvergerer også $\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|x|}{n}\right)^n$. Dermed konvergerer den opprinnelige rekken for alle x .

- 3 Rotasjonslegeme:** Oppgaven var å beregne volumet som fremkommer når området avgrenset av $y = x^2$ og $y = 1$ roteres om $y = 2$. Dette er en standardoppgave.

Oppgaven kan løses ved sylinderskallmetoden, "kronestykkemetoden" eller ved Pappus' teorem. Den vanskeligste delen av oppgaven var å stille opp integralet riktig. De fleste klarte å beregne det integralet de hadde satt opp.

Vanlige feil var blant annet:

- Å rotere om en annen akse enn $y = 2$.
- Å kun betrakte den delen av legemet som hadde positiv x -verdi. Ved symmetri av legemet gav dette kun halve volumet.
- Å ikke huske den aktuelle formelen for rotasjonslegeme riktig.
- Å ikke finne riktig radius eller høyde for sylinderskallene.
- Å ikke finne riktig indre og ytre radius for kronestykkene.
- Å integrere med hensyn på x i stedet for med hensyn på y eller omvendt.
- Å misforstå området som skulle roteres.
- Å blande sammen sylinderskall og kronestykke metoden. F.eks: Kandidatene tegnet kronestykker, og tok sylinderskall formel, og prøvde å sette inn data fra tegningen inn i formelen.

- 4 Eulers metode:** Dette var en ganske enkel oppgave hvor man skulle anvende Eulers metode for å estimere $y(1)$ for et oppgitt initialverdiproblem. Det var selvfølgelig en del av oppgaven å huske hva Eulers metode er.

Det forekom regnefeil i besvarelsene, både systematiske og tilfeldige.

Noen kandidater tok ett for mye eller ett steg for lite i Eulers metode.

En annen feil i føringen som forekom ganske ofte var at det ikke på noen måte fremkom at Eulers metode kun gir en tilnærmet verdi for $y(1)$. Derfor ble det trukket i scoren for de kandidatene kun hadde skrevet $y(1) = \frac{44}{27}$. Som et minstekrav måtte man skrive “en tilnærmet verdi for $y(1)$ er $\frac{44}{27}$ ” eller “ $y_3 = \frac{44}{27}$ ” eller “ $y(1) \approx \frac{44}{27}$ ”.

- 5** **Trapesmetoden:** Oppgaven var todelt. La $f(x) = \cos(\sin(x))$. Den første delen var å vise at $|f''(x)| \leq 2$ for alle x . Deretter skulle kandidaten bruke trapesmetoden for å estimere integralet $\int_0^1 f(x) dx$ med feil mindre enn 0,01. Dette er en standardoppgave, og formelen for trapesmetoden står i Rottmann.

For å løse første del finner man at $f''(x) = \sin(x) \cdot \sin(\sin(x)) - \cos^2(x) \cdot \cos(\sin(x))$. Hovedideen er at man skal bruke at sin og cos begge har verdimengden $[-1, 1]$. Derfor er hvert av produktene i absoluttverdi mindre enn 1, og ved trekantulikheten følger at $|f''(x)| \leq 1 + 1 = 2$. Mange kandidater nevner ikke trekantulikheten eksplisitt, men formulerer denne med egne ord. Det er OK. Derimot var det endel kandidater som kun argumenterte for at $f''(x) \leq 2$, og glemte å si at $-2 \leq f''(x)$.

På del to av oppgaven må man først finne et antall trapeser som er tilstrekkelig for å oppnå et estimat med feil mindre enn 0,01. Ved del en kan man bruke $M_2 = 2$ i formelen for feilestimatet. Feilen ved å bruke n trapeser er da mindre enn

$$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12n^2},$$

og ulikheten

$$\frac{2}{12n^2} < 0,01$$

sikrer derfor at trapesmetoden minst gir ønsket nøyaktighet. Man ser at $n = 5$ er tilstrekkelig. Trapesmetoden gir da en tilnærmede verdien 0,87.

Alt for mange kandidater satte opp ulikheten gal vei! Dette ble det trukket for. Likevel valgte også de fleste av disse kandidatene å bruke $n = 5$.

Alternativt kan man argumentere for tilstrekkelig nøyaktighet som følger: For $n = 5$ er feilestimatet

$$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2}{12 \cdot 5^2} = \frac{1}{120}.$$

Siden $\frac{1}{120}$ er mindre enn 0,01 er 5 trapeser tilstrekkelig.

Noen kandidater valgte seg et antall trapeser n uten å deretter argumenterer for hvor stor feil trapesmetoden da ville gi.

Det forekom også regnefeil i beregningen av den numeriske verdien for integralet. Typiske feil var å stille kalkulatoren på DEG i stedet for RAD, å glemme å multiplisere med Δx (bredden av trapesene), å glemme et eller flere ledd av $y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n$.

- 6** **Tekstoppgave med differensialligning:** Deloppgave a) var lett, mens deloppgave b) var standard.

- a) De fleste kandidater hentet en god del poeng her. Den enkleste måten å løse oppgaven på er å observere at konstant laksebestand på 50 tonn vil si at $B(t) = 50$ og $B'(t) = 0$. Ved å sette dette inn i differensialligningen får man at $r = 15$. Dermed holdes bestanden konstant dersom man fanger 15 tonn laks i året. Alternativt kan man løse differensialligningen. Man kan løse den som en førsteordens lineær differensialligning, eller som en separabel differensialligning. Den spesielle løsningen som svarer til initialverdien $B(0) = 50$ er

$$B(t) = \frac{10}{3}r + (50 - \frac{10}{3}r)e^{\frac{3}{10}t}.$$

Når $(50 - \frac{10}{3}r) = 0$ er $B(t)$ uavhengig av t . Dette gir $r = 15$.

- b) Dersom man ikke løser differensialligningen i deloppgave a), må den løses nå. Laksestammen dør ut når $B(t) = 0$, og løser man med hensyn på t gir dette $t = \frac{10}{3} \ln(\frac{r}{r-15})$. Dette svaret kan omskrives på mange ulike måter. En noe alternativ løsningsmetode er som følger: Man løser differensialligningen som en separabel differensialligning, men i stedet for å skrive ut løsningen som en funksjon $B(t)$ stopper man ved den implisitte formen

$$\ln |B - \frac{10}{3}r| = \frac{3}{10}t + C.$$

Man bruker initialverdbetingelsen $B = 50$ ved $t = 0$ til å finne konstanten $C = \ln |50 - \frac{10}{3}r|$. Altså er den spesielle løsningen på implisitt form

$$\ln |B - \frac{10}{3}r| = \frac{3}{10}t + \ln |50 - \frac{10}{3}r|.$$

Dermed er $B = 0$ på tidspunktet $t = \frac{10}{3} (\ln \frac{10r}{3} - \ln(\frac{10r}{3} - 50))$. Dette er samme tidspunkt som oppgitt over.

De kandidatene som ikke klarte å løse deloppgave b) hadde i større eller mindre grad ikke klart å løse differensialligningen. I verste fall behersket de ikke å løse differensialligninger, i beste fall var det kun noen regnefeil.

- 7 Optimalisering:** Inntil en vegg ligger en jordvoll med profil beskrevet av ellipsen $y = \sqrt{12 - 4x^2}$. Først skulle man finne tangenten i et vilkårlig punkt på denne kurven. Oppgaven var deretter å finne lengden av den korteste stigen som kunne plasseres mellom flatmark og veggen (uten å trenge inn i jordjollen). Denne oppgaven var svært vanskelig og den krevde gode regneferdigheter.

Fremgangsmåten er som følger: Først finner man den deriverte til $y = \sqrt{12 - 4x^2}$. Så finner man ligningen til tangenten gjennom et punkt $(x_1, y_1) = (x_1, \sqrt{12 - 4x_1^2})$ på kurven. Dernest finner man hvor denne tangenten skjærer x - og y -aksen. Lengden av den tilsvarende stigen er da gitt ved Pytagoras. Man ser på lengden som en funksjon av x_1 (det vil si x -verdien til det vilkårlige punktet på kurven). Deretter deriverer man lengden (eller kvadratet av lengden) med hensyn på x_1 . For de tillatte verdiene av x_1 , d.v.s. mellom 0 og $\sqrt{3}$, er det kun ett kritisk punkt, nemlig $x_1 = 1$. Dette må være et minimum siden lengden går mot uendelig når $x_1 \rightarrow 0$ og $x_1 \rightarrow \sqrt{3}$. Til sist beregner man lengden av stigen gjennom $(1, \sqrt{8})$ til å være $3\sqrt{3}$.

De fleste kandidater har klart å derivere $y = \sqrt{12 - 4x^2}$.

Endel kandidater skaper forvirring for seg selv når de skal skrive opp ligningen for tangenten. De skiller ikke mellom x -verdien til det aktuelle punktet på jordvollen (kalt x_1 over) og x -verdien som inngår som variabel i funksjonsuttrykket for en rett linje (tangenten).

Det er mange kandidater som misforstår den matematiske betydningen av ordet “vilkårlig”. Det betyr det samme som “generelt”. Det betyr ikke at man selv kan velge et punkt på jordvollen. Ved sensuren har det ikke blitt trukket for denne misforståelsen. Derimot kunne ikke kandidatene som valgte seg et punkt kommet videre til optimaliseringsdelen.

Blant de kandidatene som finner skjæringspunktene mellom tangenten og koordinat-aksene er det mange som ikke forenkler uttrykkene. Dermed blir det mye vanskeligere å fortsette beregningen av lengden til stigen og å derivere denne formelen. Derfor er det svært få kandidater som kommer fram til det kritiske punktet for stigens lengde.

Sensorene har også forventet at kandidatene skal begrunne at det kritiske punktet tilsvarer et minimum for stigens lengde. Dette kan man se geometrisk: En stige som tangerer jordvollen et et av endepunktene er uendelig lang (d.v.s. skjærer aldri den andre koordinataksen).