Induksjonsprinsippet – med noen eksempler

TMA4100 Matematikk 1

Induksjonsprinsippet Anta at for hver $n \in \mathbb{N}$ har vi gitt et utsagn P_n. Anta videre at vi vet at følgende to krav er oppfylt:

(i) P_1 er sann.

(ii) Dersom P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$, så er også P_{k+1} sann.

Da er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel 1
Vi skal vise ved induksjon at summen av de n første naturlige tallene er $n(n+1)/2$. Påstanden P_n er i dette tilfellet $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$, eller, om vi bruker summetegn,

$$P_n : \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vi må først sjekke at formelen er riktig når $n = 1$ slik at P_1 er sann. Setter vi $n = 1$ i P_n, får vi

$$P_1 : \qquad \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} \qquad \text{dvs.} \quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

som opplagt er riktig.

Vi antar så, som induksjonshypotese, at P_n er sann for $n = k$, det vil si

$$P_k : \qquad \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2},$$

og må vise at da er P_n sann for $n = k + 1$. Vi må altså vise at

$$P_{k+1} : \qquad \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Det kan vi gjøre ved å dele opp summen på venstre side i to slik at vi kan bruke induksjonshypotesen på den første delen:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Altså er P_{k+1} sann, og ved induksjon følger at P_n gjelder for alle naturlige tall $n \geq 1$.

På tilsvarende måte kan vi vise summeformler som for eksempel:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \qquad \text{og} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(Summen av de n første oddetallene er n^2, og summen av de n første kvadrattallene er $n(n+1)(2n+1)/6$.)

Eksempel 2 *Eksamen Matematikk 1A 16.12.94*
Vis ved induksjon at

$$\cos u \cdot \cos 2u \cdot \cos 4u \cdot \cos 8u \cdots \cos(2^{n-1}u) = \frac{\sin(2^n u)}{2^n \sin u} \tag{1}$$

for alle hele tall $n \geq 1$.

Setter vi $n = 1$ i (1), har produktet på venstre side bare en faktor, og formelen (1) reduserer seg til

$$\cos u = \frac{\sin 2u}{2 \sin u}$$

som er riktig siden $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$. Anta så at (1) er OK for $n = k$:

$$\cos u \cdot \cos 2u \cdot \cos 4u \cdots \cos(2^{k-1}u) = \frac{\sin(2^k u)}{2^k \sin u}. \tag{2}$$

Vi må vise at da er

$$\cos u \cdot \cos 2u \cdot \cos 4u \cdots \cos(2^k u) = \frac{\sin(2^{k+1} u)}{2^{k+1} \sin u}.$$

Det gjør vi ved å bruke induksjonshypotesen (2) og identiteten $\sin v \cos v = \frac{1}{2} \sin 2v$:

$$\begin{aligned}
\cos u \cdot \cos 2u \cdot \cos 4u \cdots \cos(2^k u) &= \left[\cos u \cdot \cos 2u \cdots \cos(2^{k-1}u)\right] \cdot \cos(2^k u) \\
&= \frac{\sin(2^k u)}{2^k \sin u} \cdot \cos(2^k u) = \frac{\sin(2^k u)\cos(2^k u)}{2^k \sin u} = \frac{\frac{1}{2}\sin(2 \cdot 2^k u)}{2^k \sin u} = \frac{\sin(2^{k+1}u)}{2^{k+1} \sin u}.
\end{aligned}$$

Ved induksjon følger det at formelen (1) gjelder for alle hele tall $n \geq 1$.

Eksempel 3 *Bernoullis ulikhet*
Vi skal vise Bernoullis ulikhet

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{for } x \geq -1 \tag{3}$$

for alle hele tall $n \geq 0$.

Siden påstanden i dette tilfellet skal gjelde for $n \geq 0$, starter vi med å kontrollere at den er riktig for $n = 0$. Setter vi $n = 0$ i (3), får vi

$$1 \geq 1 \quad \text{for } x \geq -1$$

som åpenbart er riktig. Vi antar så at

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx \quad \text{for } x \geq -1 \tag{4}$$

for et vilkårlig helt tall $k \geq 0$, og må vise at

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x \quad \text{for } x \geq -1. \tag{5}$$

Multipliserer vi begge sider av ulikheten (4) med $x + 1$ (som er ikke-negativ når $x \geq -1$), får vi

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x).$$

Det bruker vi for å vise at (5) holder:

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x.$$

der den siste ulikheten gjelder siden $kx^2 \geq 0$. Dermed er (5) riktig, og Bernoullis ulikhet følger for alle hele tall $n \geq 0$ ved induksjon.