Kort innføring i polynomdivisjon for MAT 1100

I dette notatet skal vi se litt på polynomdivisjon. Mange vil kjenne denne teknikken fra før, men etter siste læreplanomlegning er den ikke lenger pensum i videregående skole.

La oss først minne oss selv om hva et polynom er. Typiske eksempler er

$$P(x) = 7x^4 - 3x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x + 13$$

(som er et fjerdegradspolynom) og

$$Q(x) = -3x^5 + \pi x^2 - 102$$

(som er et femtegradspolynom). Generelt er et n-te gradspolynom et uttrykk på formen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

der $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ er gitte tall og $a_n \neq 0$. Tallene $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ kan være reelle, og da kaller vi P et reelt polynom, eller de kan være komplekse, og da kaller vi P et komplekst polynom. I dette notatet vil vi bare ta for oss reelle polynomer, men alle teknikker og resultater gjelder like godt for komplekse polynomer. Legg merke til at (noen av) tallene $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ kan være negative og da får vi minus istedenfor pluss mellom leddene. Det kan også hende at noen av tallene $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ er lik 0, og da vil det se ut som polynomet "mangler" enkelte ledd (slik som $Q(x)$ ovenfor ser ut til å mangle ledd av fjerde, tredje og første grad).

1 Polynomdivisjon

Polynomdivisjon er en teknikk for å dele et polynom med et annet polynom. Som du snart vil se, ligner den mye på den teknikken vi bruker for å dele et flersifret tall med et annet tall. Det er kanskje greiest å begynne med et eksempel.

Eksempel 1: Vi skal dele $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4$ med $Q(x) = x^2 - 2x + 4$. Vi setter først opp dette som et vanlig divisjonsstykke:

$$2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 \ : \ x^2 - 2x + 4 =$$

Først skritt i utregningen er å se hvilken størrelse vi må gange divisoren $x^2 - 2x + 4$ med for at det høyeste leddet i svaret skal stemme med det høyeste leddet til dividenden $2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4$. I vårt eksempel er dette $2x^2$, og vi fører dette på denne måten:

$$
\begin{array}{l}
2x^4+4x^3-3x^2+x+4 \ : \ x^2-2x+4 = \ 2x^2 \\
2x^4-4x^3+8x^2
\end{array}
$$

Legg merke til at uttrykket på den nederste linjen er det vi får når vi ganger divisoren x^2-2x+4 med $2x^2$. Vi trekker nå den nederste linjen fra den øverste:

$$
\begin{array}{l}
\quad 2x^4+4x^3-3x^2 \ \ +x+4 \ : \ x^2-2x+4 = \ 2x^2 \\
\underline{-(2x^4-4x^3+8x^2)} \\
\qquad\qquad 8x^3-11x^2+x+4
\end{array}
$$

Vi gjentar nå prosedyren. Denne gangen må vi finne hvilken størrelse vi må gange x^2-2x+4 med for å få det høyeste leddet lik $8x^3$. Det er $8x$, og vi skriver:

$$
\begin{array}{l}
\quad 2x^4+4x^3-3x^2 \ \ +x+4 \ : \ x^2-2x+4 = \ 2x^2+8x \\
\underline{-(2x^4-4x^3+8x^2)} \\
\qquad\qquad 8x^3-11x^2+x+4 \\
\qquad\qquad 8x^3-16x^2+32x
\end{array}
$$

Som ovenfor trekker vi den nederste linjen fra den nest nederste:

$$
\begin{array}{l}
\quad 2x^4+4x^3-3x^2+x+4 \ : \ x^2-2x+4 = \ 2x^2+8x \\
\underline{-(2x^4-4x^3+8x^2)} \\
\qquad\qquad 8x^3-11x^2+x+4 \\
\qquad\quad \underline{-(8x^3-16x^2+32x)} \\
\qquad\qquad\qquad 5x^2-31x+4
\end{array}
$$

Vi gjentar prosedyren enda en gang. Denne gangen må vi finne hvilken størrelse vi må gange x^2-2x+4 med for å få høyeste ledd lik $5x^2$. Det er 5, og vi skriver:

$$
\begin{array}{l}
\quad 2x^4+4x^3-3x^2+x+4 \ : \ x^2-2x+4 = \ 2x^2+8x+5 \\
\underline{-(2x^4-4x^3+8x^2)} \\
\qquad\qquad 8x^3-11x^2+x+4 \\
\qquad\quad \underline{-(8x^3-16x^2+32x)} \\
\qquad\qquad\qquad 5x^2-31x+4 \\
\qquad\qquad\qquad 5x^2-10x+20
\end{array}
$$

Vi trekker fra den nederste linjen og får:

$$
\begin{array}{l}
\quad 2x^4+4x^3-3x^2+x+4 \;:\; x^2-2x+4 = \; 2x^2+8x+5 \\
-\underline{(2x^4-4x^3+8x^2)} \\
\qquad\quad 8x^3-11x^2+x+4 \\
\qquad -\underline{(8x^3-16x^2+32x)} \\
\qquad\qquad\quad 5x^2-31x+4 \\
\qquad\qquad -\underline{(5x^2-10x+20)} \\
\qquad\qquad\qquad -21x-16
\end{array}
$$

Uttrykket $-21x+4$ på nederste linjen har nå lavere grad enn divisor x^2-2x+4 og polynomdivisjonen er da ferdig. Vi kaller "svaret" $K(x)=2x^2+8x+5$ for den *(ufullstendige) kvotienten* og uttrykket $R(x)=-21x-16$ på nederste linje for *resten* (sammenlign med vanlig divisjon). Hva betyr så disse uttrykkene? Jo, de betyr at

$$\frac{2x^4+4x^3-3x^2+x+4}{x^2-2x+4} = 2x^2+8x+5+\frac{-21x-16}{x^2-2x+4}$$

(sjekk dette ved å trekke sammen høyresiden!). Ganger vi med x^2-2x+4 på begge sider, får vi

$$2x^4+4x^3-3x^2+x+4 = (2x^2+8x+5)(x^2-2x+4)+(-21x-16) \qquad \spadesuit$$

Resultatet i Eksempel 1 gjelder helt generelt; dersom vi har to polynomer $P(x)$ og $Q(x)$ der $P(x)$ har høyere grad enn $Q(x)$, så kan vi ved å bruke metoden ovenfor finne to polynomer $K(x)$ og $R(x)$, der $R(x)$ har lavere grad enn $Q(x)$, slik at

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Ganger vi med $Q(x)$, får vi

$$P(x) = K(x)Q(x)+R(x)$$

Vi skriver opp dette resultatet som en setning:

Setning 1 *Anta at $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer og at graden til $Q(x)$ er minst én. Da finnes det polynomer $K(x)$, $R(x)$ der graden til $R(x)$ er ekte mindre enn graden til $Q(x)$, slik at*

$$P(x) = K(x)Q(x)+R(x) \text{ for alle } x$$

Legg merke til at dersom graden til $P(x)$ er mindre enn graden til $Q(x)$, kan vi velge $K(x)=0$ og $R(x)=P(x)$.

Vi tar ikke med beviset for denne setningen selv om det er forholdsvis enkelt (man kan f.eks. bruke induksjon på graden til $P(x)$). Isteden tar vi med et eksempel til der vi nå bare viser det ferdige resultatet av polynomdivisjonen (prøv deg selv før du ser på resultatet!).

Eksempel 2: Vi skal bruke polynomdivisjon til å dele $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ på $Q(x) = x - 2$. Vi får:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 + 3x^2 - 4x + 5 \; : \; x - 2 = \; x^2 + 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\quad 5x^2 - 4x + 5 \\
\qquad \underline{-(5x^2 - 10x)} \\
\qquad\qquad\quad 6x + 5 \\
\qquad\qquad \underline{-(6x - 12)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 17
\end{array}
$$

Altså er

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x - 2} = x^2 + 5x + 6 + \frac{17}{x - 2} \qquad \spadesuit$$

Hva skal så polynomdivisjon brukes til? Det viser seg at polynomdivisjon er en teknikk som dukker opp mange steder i matematikken, men i dette kurset skal vi hovedsakelig bruke den til å løse ligninger og integrasjonsoppgaver. Som en liten forsmak på hvordan polynomdivisjon brukes til å løse integrasjonsoppgaver, kan vi tenke oss at vi skal regne ut integralet

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x - 2}\, dx$$

Ifølge Eksempel 2 kan dette integralet skrives

$$\int (x^2 + 5x + 6 + \frac{17}{x - 2})\, dx$$

og nå er det ikke så vanskelig å regne ut:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{x - 2}\, dx &= \int (x^2 + 5x + 6 + \frac{17}{x - 2})\, dx \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 6x + 17 \ln|x - 2| + C
\end{aligned}
$$

Dette eksempelet er spesielt enkelt fordi vi har et førstegradspolynom i nevneren. For å håndtere nevnere av høyere grad, må vi kombinere polynomdivisjon med delbrøkoppspalting (dette får du lære om i seksjon 9.3 i *Kalkulus*).

Oppgaver

1. Utfør polynomdivisjon $P(x) : Q(x)$ og kontroller svaret:
a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$, $Q(x) = x - 3$
b) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2$, $Q(x) = x^2 + 2x - 1$
c) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$, $Q(x) = x^2 - 1$

2. Regn ut integralene:
a) $\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}\, dx$
b) $\int \frac{x^2}{x+1}\, dx$

2 Polynomdivisjon og ligningsløsning

Når vi deler to (hele) tall på hverandre, kan to ting skje — enten går divisjonen opp (slik som når vi deler 42 på 7), eller vi kan stå igjen med en rest (slik som når vi deler 45 på 7 og står igjen med resten 3). Det samme skjer med polynomdivisjon – noen ganger blir resten $R(x)$ lik null, og divisjonen går dermed opp. Her er et eksempel:

Eksempel 3: Vi skal dele $P(x) = x^4+3x^3-2x^2-5x+3$ på $Q(x) = x^2+x-1$. Vi får:

$$\begin{array}{l}
x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 \ : \ x^2 + x - 1 = \ x^2 + 2x - 3 \\
\underline{-(x^4 + x^3 - x^2)} \\
2x^3 - x^2 - 5x + 3 \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2 - 2x)} \\
 - 3x^2 - 3x + 3 \\
\underline{-(- 3x^2 - 3x + 3)} \\
 0
\end{array}$$

Dermed går divisjonen opp, og vi har

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3}{x^2 + x - 1} = x^2 + 2x - 3$$

Ganger vi med $x^2 + x - 1$ på begge sider, får vi

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 = (x^2 + x - 1)(x^2 + 2x - 3)$$

Dette er en svært nyttig opplysning dersom vi ønsker å løse fjerdegradsligningen

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Denne ligningen kan nemlig nå skrives

$$(x^2 + x - 1)(x^2 + 2x - 3) = 0$$

Siden et produkt bare er null dersom en av faktorene er null, betyr dette at x er en løsning av ligningen $x^4+3x^3-2x^2-5x+3=0$ hvis og bare hvis x er en løsning av en av de to ligningene $x^2+x-1=0$ eller $x^2+2x-3=0$. Disse annengradsligningene kan vi løse på vanlig måte (gjør det!), og vi finner dermed at fjerdegradsligningen $x^4+3x^3-2x^2-5x+3=0$ har løsningene:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\ ,\ x_3 = -3\ ,\ x_4 = 1 \qquad \spadesuit$$

Denne sammenhengen mellom polynomdivisjon og ligningsløsning kan vi utnytte mer systematisk. Anta at vi deler et polynom $P(x)$ på førstegradspolynomet $x-a$ (der a er et tall). Siden resten skal ha lavere grad enn divisoren $x-a$, må den være en konstant r (se Eksempel 2 ovenfor dersom du synes dette er forvirrende). Det betyr at

$$P(x) = K(x)(x-a) + r \qquad \text{for alle } x$$

(husk Setning 1). Setter vi $x=a$ i dette uttrykket, får vi:

$$P(a) = r$$

Det betyr at dersom a er en rot i polynomet $P(x)$, så må r være lik 0. Omvendt, hvis r er lik null, så er a en rot i polynomet $P(x)$. Vi har dermed vist følgende setning.

Setning 2 *Et tall a (reelt eller komplekst) er rot i polynomet $P(x)$ hvis og bare hvis $P(x)$ er delelig med $x-a$.*

Her er et eksempel som viser hvordan denne setningen kan brukes i praksis.

Eksempel 4: Vis at $x=3$ er en rot i ligningen $x^3-4x^2-3x+18=0$ og finn de andre røttene.

Vi lar $P(x)=x^3-4x^2-3x+18$. For å vise at 3 er en rot i ligningen $P(x)=0$, setter vi inn:

$$P(3) = 3^3 - 4\cdot 3^2 - 3\cdot 3 + 18 = 27 - 36 - 9 + 18 = 0$$

For å finne de andre røttene, deler vi nå $P(x)$ med $x-3$ (fra lemmaet vet vi at denne divisjonen kommer til å gå opp):

$$\begin{array}{rl}
x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \ :\ x-3 = & x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - 3x^2)} \qquad\qquad\quad & \\
-x^2 - 3x + 18 & \\
\underline{-(-x^2 + 3x)} \qquad\ \ & \\
-6x + 18 & \\
\underline{-(6x + 18)} & \\
0 &
\end{array}$$

Altså er

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x - 3} = x^2 - x - 6$$

eller med andre ord

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x^2 - x - 6)(x - 3)$$

Siden annengradsligningen $x^2 - x - 6 = 0$ har løsningene $x = -2$ og $x = 3$, betyr dette at de andre røttene i ligningen $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ er -2 og 3 (legg merke til at 3 altså er er en dobbeltrot i ligningen $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$). Vi kan nå faktorisere tredjegradspolynomet $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ slik

$$x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x^2 - x - 6)(x - 3) = (x - 3)^2(x + 2) \qquad \spadesuit$$

Dersom vi kjenner to eller flere røtter i polynomet, kan vi effektivisere prosedyren ovenfor litt. Vet vi f.eks. at $x = 1$ og $x = -2$ er røtter i $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, kan vi dele $P(x)$ på produktet $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ for å finne den siste roten. Vi får da (utfør regningene selv!)

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 2} = x - 3$$

Den tredje roten er altså $x = 3$.

Oppgaver

3. Vis at $x = 1$ er en rot i polynomet $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Finn de andre røttene.

4. Vis at $x = 1$ og $x = -3$ er røtter i polynomet $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$. Finn de andre røttene.

Fasit

1.a) $3x^2 + 11x + 38 + \frac{110}{x-3}$
b) $x^2 - 5x + 13 + \frac{-28x+11}{x^2+2x-1}$
c) $x^2 - 1 + \frac{3x-2}{x^2-1}$

2.a) $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x+1| + C$
b) $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$

3. $x = -2$ og $x = -3$

4. $x = \sqrt{2}$ og $x = -\sqrt{2}$