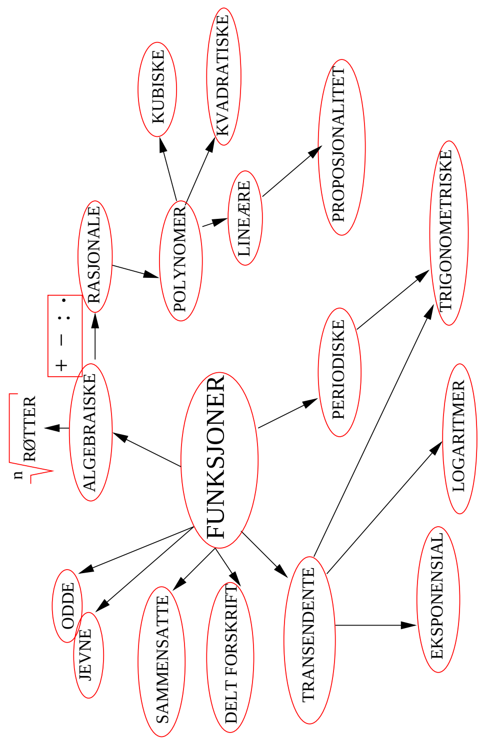


rasjonale
polynomer
proposjonaliteter
lineære
kvadratiske
kubiske
n’te-røtter
algebraiske
transendente
trigonometriske
eksponentsial
logaritmiske
sammensatte
invertible
jevne
odde
periodiske
kontinuerlige

funksjoner

Derivasjon

Definisjon

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Regler

$$\begin{aligned} (cf)' &= cf' \\ (f+g)' &= f'+g' \\ (fg)' &= f'g+fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g-fg'}{g^2} \end{aligned}$$

Kjerneregelen

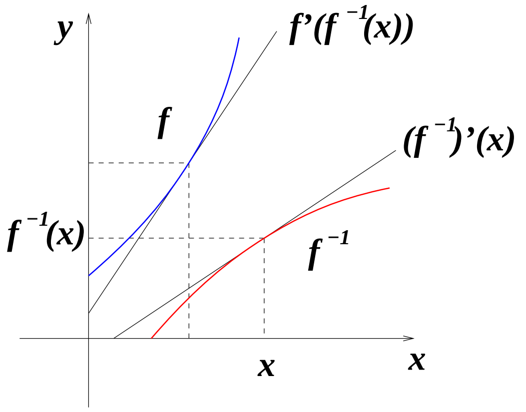
$$(g\circ f)'(x) = (g'\circ f)(x)\cdot f'(x)$$

Når $y = g(u)$ og $u = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Deriverte av inverse funksjoner

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



Den deriverte av

logaritmen

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

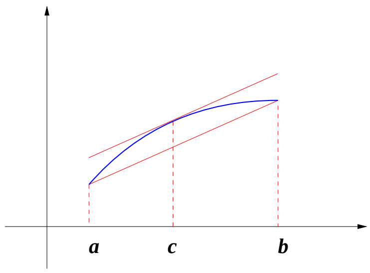
Den deriverte av inverse

trigonometriske funksjoner.

f	D_f	V_f
$\sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$[-\pi/2,\pi/2]$
$\cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\tan^{-1}x$	$[-\infty,\infty]$	$[-\pi/2,\pi/2]$
$\cot^{-1}x$	$[-\infty,\infty]$	$[0,\pi]$
$\sec^{-1}x$	$[-\infty,-1]\cup[1,\infty]$	$[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$
$\csc^{-1}x$	$[-\infty,-1]\cup[1,\infty]$	$[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$

f	f'
$\sin^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1}x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\cot^{-1}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1}x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\csc^{-1}x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Mellomverdi-satsen $f(x)$ kontinuelig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b)



$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Linearisering

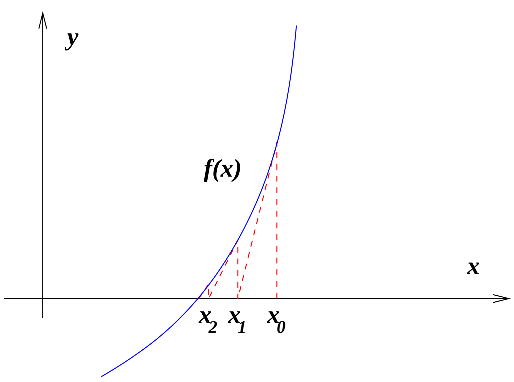
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Differensialet av $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx$$

Newtons metode for å løse $f(x) = 0$. Start med å velge x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



L'Hopitals regel. $f(x)$, $g(x)$ deriverbare og $f(a) = g(a) = 0$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Fundamentalteoremet i kalkulus

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

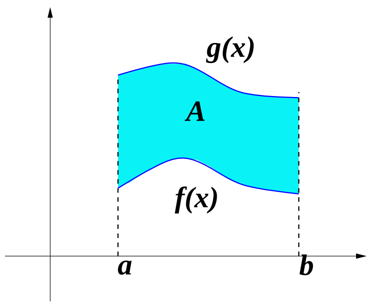
Substitusjonsregelen: $u = g(x)$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)du$$

For bestemt integral

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

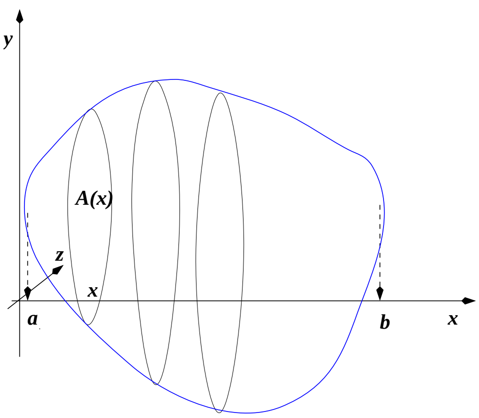
Areal mellom kurvene f og g over intervallet $[a,b]$, $f(x) \leq g(x)$ på $[a,b]$



$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

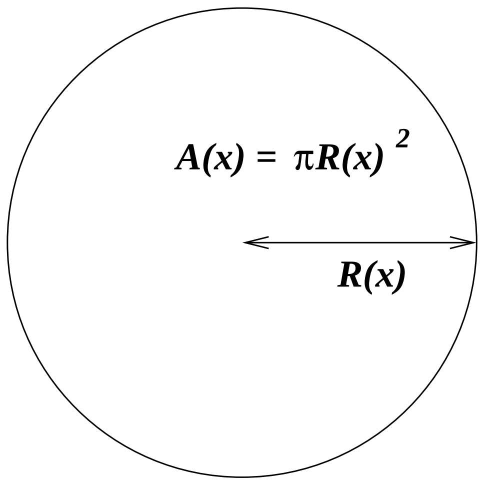
Volum ved slice metoden

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$



Rotasjonslegemer: Diskmetoden

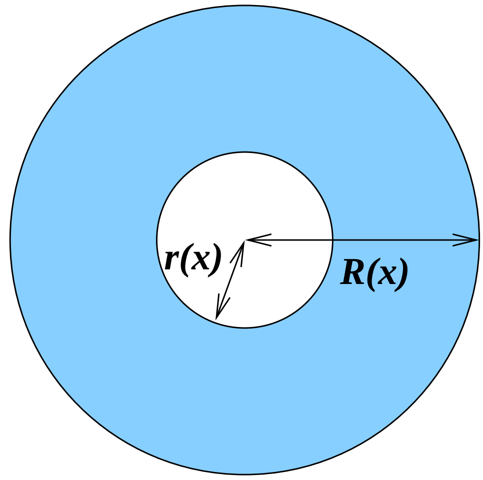
$$V = \int_a^b \pi R(x)^2\,dx$$



Rotasjonslegemer: Disk med hull -metoden

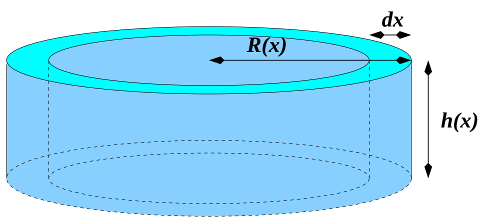
$$V = \int_a^b \pi(R(x)^2 - r(x)^2)\,dx$$

$$A(x) = \pi(R(x)^2 - r(x)^2)$$



Rotasjonslegemer: Sylindriske skjell

$$V = \int_a^b 2\pi(\text{radius})(\text{høyde})dx$$



Kurvelengde

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Areal av omdreiningsflater ($y = f(x)$ rotert om x-aksen):

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dy$$

Separable differensiallikninger

$$y' = f(x)g(y)$$

Delvis integrasjon

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Trigonometriske integraler

Trigonometriske substitusjoner

Delbrøksoppspalting

Konvergens divergens av følger.

Integraltesten. $a_n = f(n)$ for $n \geq N$, $f(x)$ positiv avtagende funksjon. Enten konvergerer både

$$\sum a_n \text{ og } \int_N^\infty f(x)\,dx$$

eller så divergerer begge.

Sammenlikningstesten

Grensesammelikningstesten

$$\sum |a_n|$$

- Konvergens når $\rho < 1$
- Divergens når $\rho > 1$

Forholdstesten

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Rottesten

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}$$

Absolutt / betinget konvergens

Alternerende rekke test

$$\sum (-1)^n u_n$$

- $u_n > 0$ for $n > N$
- $u_n > u_{n+1}$ for $n > N$
- $u_n \to 0$ når $n \to \infty$

Potensrekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x$$

Konvergensradius

$$R = \lim^{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Ledd for ledd

derivering og integrering

av potensrekker.

Taylor- og Maclaurin $(a = 0)$ rekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylors formel

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Restledd

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Eulers identitet

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Binomial rekker = Taylorrekker for $f(x) = (x-a)^n$.

$$(x-a)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (x-a)^k$$

$$\binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2!},$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

1. ordens difflikning

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$f(x,y)$ funksjon i to variable.

Spesiell og generell løsning.

Førsteordens lineære differensiallikninger

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Løsning ved Integrerende faktor

$$U(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$y(x) = \frac{1}{U(x)} \int U(x)Q(x)\,dx$$

Nummerisk integrasjon

Trapesmetoden

$$T_n = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (1)$$

Feilestimering: $|f''(x)| \leq M$ for $x \in [a,b]$.

$$|E_T| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - T_n \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

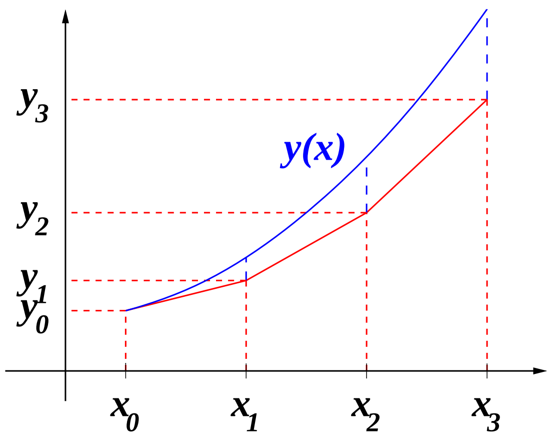
Simpsons metode Trapesmetoden

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \quad (2)$$

Feilestimering: $|f^{(4)}(x)| \leq M$ for $x \in [a,b]$.

$$|E_S| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

Eulers metode



$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + \Delta x \cdot f(x_1, y_1) \\ y_3 &= y_2 + \Delta x \cdot f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Eulers forbedrede metode

Ett steg består av

$$k_1 = \Delta x \cdot f(x_n, y_n) \quad (3)$$

$$k_2 = \Delta x \cdot f(x_{n+1}, y_n + k_1) \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (5)$$

Julenøtt: e irrasjonal

a) Gitt $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x)$. Vis at $|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ og at $0 < |R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

b) Anta e rasjonal vis at da er $e = \frac{p}{q!}$ for heltall p og q. Vis at da er

$$q!|R_q(1)| = q! \left| \frac{p}{q!} - (1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!}) \right|$$

et heltall.

c) Bruk resultatet i a til å vise at $0 < q!|R_n(1)| < 1$. Kan e være rasjonal?