Norges
teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4100
Matematikk 1
Høst 2011

Øving 8

Dette er en fellesøving med IT Grunnkurs. De delene av oppgaven som er markert med blått skal besvares i IT-øvingen, mens resten av oppgaven skal besvares i matteøvingen.

1

a) Skriv en implementasjon av Newtons metode fra Kapittel 4.7 i læreboken. Implementasjonen skal ta inn en funksjon, den deriverte til funksjonen, et gjettet nullpunkt, feiltoleranse ϵ og et maksimalt antall iterasjoner.

Implementasjonen skal gi ut et estimat på et nullpunkt innenfor feiltoleransen, eventuelt en melding om at den ikke klarte å finne et godt nok estimat innen det oppgitte antallet iterasjoner.

b) Vis at funksjonen $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \cos(2x)$ har et nullpunkt mellom $x = 0$ og $x = \pi/2$. Finn et estimat for et slikt nullpunkt ved hjelp av implementasjonen du laget tidligere. Bruk startverdien $x_0 = 1$ og feiltoleranse $\epsilon = 0.001$.

Hva skjer dersom du velger $x_0 = 2$ som startverdi?

c) Bruk implementasjonen fra deloppgave a. til å estimere roten til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases} \quad = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|},$$

med startverdi $x_0 = 1$ og feiltoleranse $\epsilon = 0.001$. Diskuter resultatet.

2 La $f(x) = e^{-x^2}$. Vi ønsker å regne ut integralet

$$\int_0^1 f(x)dx. \tag{1}$$

Siden det ikke finnes noe enkelt uttrykk for en antiderivert til $f(x)$ ønsker vi å bruke numerisk integrasjon for å finne verdien på uttrykket.

a) Finn en tilnærmet verdi av integralet i (1) ved å bruke trapesmetoden med fire delintervaller. Bruk så Simpsons metode til å finne tilnærmede verdier av integralet, først med fire delintervaller, deretter med åtte.

b) Vis at $|f''(x)| \leq 2$ for $x \in [0,1]$, og at $|f^{(4)}(x)| \leq 20$ for $x \in [0,1]$. Bruk dette for å finne en øvre skranke for feilen i de tre tilnærmede verdiene fra forrige oppgave.

Hvor mange delintervaller må vi bruke med trapesmetoden for å være sikker på at feilen ikke overstiger $\frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$? Hvor mange delintervaller må vi ha med Simpsons metode?

c) Skriv implementasjoner av trapesmetoden og Simpsons metode. Implementasjonen skal ta inn en funksjon, et integrasjonsintervall og antall delintervaller. Test implementasjonene med integralet i (1) og sjekk at du får samme svar som du fikk for hånd i deloppgave a.

Bruk implementasjonen din til å finne en tilnærmet verdi av integralet i (1) med trapesmetoden og 1000 delintervaller.

d) Ofte er det vanskelig å finne gode skranker for $f^{(4)}(x)$, men vi ønsker likevel å ha en viss kontroll på hvor stor feil vi gjør. Vi skal nå se på en mulig praktisk løsning på problemet.

La S_n være tilnærmingen til integralet vi får når vi bruker Simpsons metode med n delintervaller. Det er rimelig å anta at S_8 er mye mer nøyaktig enn S_4. Det betyr at $|S_4 - S_8|$ kan være et rimelig estimat for feilen i tilnærmingen S_4.

Hvis dette estimatet sier at feilen i S_4 var for stor kan vi i stedet bruke S_8 som tilnærming. Nå kan vi finne et estimat for feilen i S_8 ved å regne ut S_{16} og bruke $|S_8 - S_{16}|$ som estimat. Slik kan vi fortsette: regn ut tilnærmingen S_{2^i} og estimer feilen ved å regne ut $S_{2^{i+1}}$ og differensen $|S_{2^i} - S_{2^{i+1}}|$. Vi stopper når feilestimatet blir mindre enn en oppgitt toleranse.

Du har allerede regnet ut S_4 og S_8, samt feilestimatet $|S_4 - S_8|$. Fortsett prosessen til du estimerer feilen i S_{2^i} til å være mindre enn toleransen 10^{-8}.

e) Funksjonen $f(x)$ som skal integreres kan være svært kostbar å regne ut. Derfor ønsker vi å bruke så få funksjonsevalueringer som overhodet mulig. Vi skal nå se på en metode for å gjøre regningen i forrige eksempel mer effektiv.

Regn ut antall funksjonsevalueringer som kreves for å regne ut $S_{2^1}, S_{2^2}, \ldots, S_{2^i}$ ved å bruke din implementasjon av Simpsons metode i ganger.

For å gjøre ting enklere begrenser vi oss til integrasjonsintervallet $[0,1]$. Se nå på formlene for Simpsons metode med 2, 4 og 8 delintervaller:

$$S_2 = \frac{1}{3 \cdot 2}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)\right),$$

$$S_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{2}{4}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)\right),$$

$$\begin{aligned} S_8 = \frac{1}{3 \cdot 8}\big(f(0) + 4f(\frac{1}{8}) + 2f(\frac{2}{8}) + 4f(\frac{3}{8}) + 2f(\frac{4}{8}) \\ + 4f(\frac{5}{8}) + 2f(\frac{6}{8}) + 4f(\frac{7}{8}) + f(1)\big). \end{aligned}$$

La

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= f(1/2), \\
\Delta_2 &= f(1/4) + f(3/4), \\
\Delta_3 &= f(1/8) + f(3/8) + f(5/8) + f(7/8), \\
&\dots \\
\Delta_i &= f(1/2^i) + f(3/2^i) + \cdots + f((2^i - 1)/2^i), \\
&\dots
\end{aligned}$$

Definer $U_0 = 0$ og $U_i = U_{i-1} + \Delta_i$ for $i = 1, 2, 3, \dots$. Vis at

$$S_{2^i} = \frac{1}{3n}\left(f(0) + 2U_{i-1} + 4\Delta_i + f(1)\right).$$

Bruk disse formlene til å lage en implementasjon av prosessen fra forrige deloppgave. Hvis prosessen stopper etter å ha beregnet $S_{2^{i+1}}$ skal din implementasjon ikke gjøre mer enn $2^{i+1} + 1$ funksjonsevalueringer.

$\boxed{3}$ Oppgaver fra læreboken:

- Avsnitt 7.2: Oppgave 40
- Avsnitt 7.3: Oppgave 29
- Avsnitt 7.4: Oppgave 14 og 49
- Avsnitt 7.5: Oppgave 6