Avsnitt 3.11

49 a) Fra tabell 3.4 på side 222 i boka: $\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$. Her har vi at $u = \frac{w}{H}x$, og $\frac{du}{dx} = \frac{w}{H}$. Det følger at $\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{H}{w} \cdot \frac{w}{H} \sinh \frac{w}{H}x = \sinh \frac{w}{H}x$.

b) Vi får oppgitt at $H = T\cos\phi$. Det følger at

$$\begin{aligned} T &= \frac{H}{\cos\phi} = H\sec\phi = H\sqrt{1+\tan^2\phi} \text{ (siden } \sec^2\phi = 1+\tan^2\phi) \\ &= H\sqrt{1+\sinh^2\frac{w}{H}x} \text{ (fra a))} \\ &= H\sqrt{\cosh^2\frac{w}{H}x} \text{ (siden } \cosh^2\frac{w}{H}x - \sinh^2\frac{w}{H}x = 1) \\ &= H\cosh\frac{w}{H}x = H\frac{wy}{H} = wy. \end{aligned}$$

Avsnitt 4.3

18 Vi ser på funksjonen $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

a) Vi skal finne intervallene hvor $g(x)$ er økende og minkende. Vi deriverer og får $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$. Løser vi ligningen $g'(x) = 0$, får vi løsningene $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$. Ved å sette inn har vi $g'(-1) = -24$, $g'(0.5) = 1.5$, $g'(1.5) = -1.5$ og $g'(3) = 24$. Dermed har vi at $g(x)$ er synkende på intervallene $(-\infty, 0)$ og $(1, 2)$, mens den er økende på intervallene $(0, 1)$ og $(2, \infty)$.

b) Siden $g(x)$ er deriverbar for alle x, kan vi bruke førstederiverttesten. De kritiske punktene til $g(x)$ er gitt av ligningen $g'(x) = 0$, som har løsningene $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$. Siden $g(x)$ er synkende på intervallene $(-\infty, 0)$ og $(1, 2)$ og økende på intervallene $(0, 1)$ og $(2, \infty)$, oppnår $g(x)$ ekstremverdier i $x = 0$, $x = 1$ og $x = 2$, hvor $g(0)$ og $g(2)$ er lokale minima og $g(1)$ er et lokalt maksimum.

c) Vi har at

$$g(x) \to \infty \text{ når } x \to \pm\infty.$$

Dermed har ikke funksjonen noen absolutt maksimalverdi. Funksjonens absolutte minimumsverdi inntreffer i punktet $x = 0$ og $x = 2$, hvor funksjonsverdiene er $g(0) = g(2) = 0$.

46 Vi har at $0 \le h(\theta) \le 5$ for $\theta \in [0, \pi]$ siden $0 \le \sin\frac{\theta}{2} \le 1$ for $\theta \in [0, \pi]$, og at $h(0) = 0$ og $h(\pi) = 5$. Det følger at $\theta = 0$ er et globalt (og lokalt) minimum av h og at $\theta = \pi$ er et globalt (og lokalt) maksimum av h. For $\theta \in (0, \pi)$ har vi at $h'(\theta) = \frac{5}{2}\cos\frac{\theta}{2} > 0$, så h har ikke flere lokale ekstremverdier.

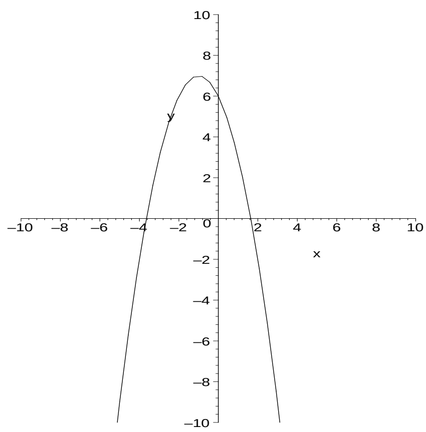
58 a) Vi ser på funksjonen $f(x) = e^x - 1 - x$. Vi skal vise at $f(x) \ge 0$ for $x \ge 0$. Vi deriverer f og får at $f'(x) = e^x - 1 \ge 0$ for $x \ge 0$. Funksjonen f er altså stigende for $x \ge 0$. Siden vi har at $f(0) = 0$, følger det at $f(x) \ge 0$ for alle $x \ge 0$.

b) Vi ser på funksjonen $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$. Vi skal vise at $g(x) \ge 0$ for $x \ge 0$. Vi deriverer g og får at $g'(x) = e^x - 1 - x \ge 0$ for $x \ge 0$ (fra a)). Funksjonen g er altså stigende for $x \ge 0$. Siden vi har at $g(0) = 0$, følger det at $g(x) \ge 0$ for alle $x \ge 0$.

Avsnitt 4.4

10 Vi skal skissere funksjonen $y = 6 - 2x - x^2$ ved å bruke prosedyren gitt på side 264 i læreboken.

1. Området til y er $(-\infty, \infty)$ og det er ingen symmetri rundt noen av aksene.
2. Vi finner
$$y'(x) = -2 - 2x,$$
$$y''(x) = -2.$$
3. Siden $y(x)$ er deriverbar for alle x, er de kritiske punktene gitt ved $y'(x) = 0$, dvs at kritisk punkt er $x = -1$. Siden $y''(-1) = -2 < 0$, har funksjonen et relativt maksimum i $(-1, y(-1)) = (-1, 7)$.
4. Siden $y'(-2) > 0$, øker funksjonen i intervallet $(-\infty, -1)$, og siden $y'(0) < 0$ minker funskjonen i intervallet $(-1, \infty)$.
5. Siden $y''(x) = -2 \neq 0$, har funksjonen ingen vendepunkt. Kurven er konkav ned.
6. Funksjonen har ingen asymptoter.
7. Kurven skjærer x-aksen i punktene gitt ved $y(x) = 6 - 2x - x^2 = 0$,
$$x^2 + 2x - 6 = 0, \quad x = -\frac{2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-6)} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{28} = -1 \pm \sqrt{7}.$$
Kurven skjærer y aksen i punktet $y(0) = 6$.

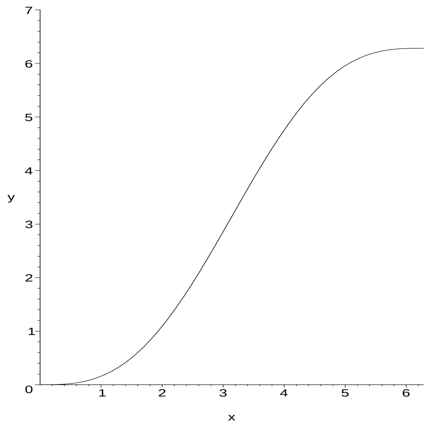


Figur 1: Oppgave 4.4.10. Skisse av grafen $y = 6 - 2x - x^2$.

22 Vi skal skissere funksjonen $y = x - \sin x$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ ved å bruke prosedyren gitt på side 264 i læreboken.

1. Området til y er $0 \leq x \leq 2\pi$, og vi får derfor ikke dratt nytte av at y er en odde funksjon.
2. Vi finner
$$y'(x) = 1 - \cos x,$$
$$y''(x) = \sin x.$$

3. Siden $y(x)$ er deriverbar for alle x, er de kritiske punktene gitt ved $y'(x) = 0$, dvs at kritisk punkt er $x = \arccos(1)$. Vi finner at de kritiske punktene $x = 0$ og $x = 2\pi$, som samsvarer med endepunktene. Dermed er $(0, 0)$ et globalt minimum og $(2\pi, 2\pi)$ et globalt maksimum.
4. Siden $y'(\pi) = \pi > 0$, øker funksjonen i intervallet $(0, 2\pi)$.
5. Vendepunktene er gitt ved $y''(x) = \sin x = 0$, og vi finner at $x = \arcsin 0 = \pi$ er et vendepunkt.
6. Funksjonen har ingen asymptoter.
7. Kurven starter i punktet $(0, 0)$ og øker til punktet $(2\pi, 2\pi)$.



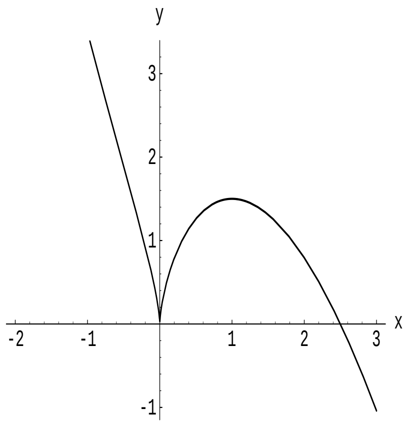
Figur 2: Oppgave 4.4.22. Skisse av grafen $y = x - \sin x$.

26 Vi skal skissere funksjonen $y = x^{2/3}\left(\frac{5}{2} - x\right) = \frac{5}{2}x^{2/3} - x^{5/3}$ ved å bruke prosedyren gitt på side 264 i læreboken.

1. Området til y er $(-\infty, \infty)$ og det er ingen symmetri rundt noen av aksene.
2. Vi finner

$$y'(x) = \frac{5}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(1 - x),$$
$$y''(x) = -\frac{5}{9}x^{-4/3} - \frac{10}{9}x^{-1/3} = -\frac{5}{9}x^{-4/3}(1 + 2x).$$

3. De kritiske punktene til $y(x)$ er gitt ved punktene x hvor $y'(x) = 0$ eller hvor $y'(x)$ ikke er definert, dvs at $x = 1$ er kritisk punkt siden $y'(1) = 0$, og $x = 0$ er kritisk punkt siden y' ikke er definert for $x = 0$. Siden $y''(1) = -\frac{5}{3} < 0$, har funksjonen et lokalt maksimum i $(1, y(1)) = (1, \frac{3}{2})$ ved andrederiverttesten. Funksjonen har et lokalt minimum i $(0, y(0)) = (0, 0)$.
4. Siden $y'(-1) = -\frac{10}{3} < 0$, $y'(0.5) = 1.05 > 0$ og $y'(1.5) = -0.728 < 0$, øker funksjonen i intervallet $(0, 1)$ og synker i intervallene $(-\infty, 0)$ og $(1, \infty)$.
5. Vendepunktene er gitt ved $y''(x) = 0$, og vi finner at $x = -\frac{1}{2}$ er et vendepunkt.
6. Funksjonen har ingen asymptoter.
7. Kurven skjærer x-aksen i punktene gitt ved $y(x) = 0$, dvs. i $x = 0$ og $x = \frac{5}{2}$. Kurven skjærer y-aksen i punktet $y(0) = 0$.



Figur 3: Oppgave 4.4.26. Skisse av grafen $y = x^{2/3}(\frac{5}{2} - x)$.

30 Vi skal skissere funksjonen $y = x^3/(3x^2+1)$ ved å bruke prosedyren gitt på side 264 i læreboken.

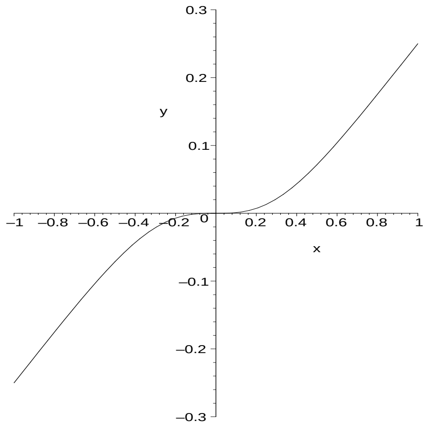
1. Området til y er $(-\infty, \infty)$, og kurven er symmetrisk rundt origo.
2. Vi finner

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^3}{3x^2+1} = \frac{3x^2\cdot(3x^2+1) - x^3\cdot 6x}{(3x^2+1)^2} = \frac{3x^2(x^2+1)}{(3x^2+1)^2},\\
y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{3x^4+3x^2}{(3x^2+1)^2} = \frac{(12x^3+6x)\cdot(3x^2+1)^2 - 3x^2(x^2+1)\cdot 2(3x^2+1)\cdot 6x}{(3x^2+1)^4}\\
&= \frac{6x(2x^2+1)\cdot(3x^2+1) - 36x^3(x^2+1)}{(3x^2+1)^3}\\
&= \frac{36x^5+12x^3+18x^3+6x-36x^5-36x^3}{(3x^2+1)^3}\\
&= \frac{-6x^3+6x}{(3x^2+1)^3} = \frac{6x(-x^2+1)}{(3x^2+1)^3}.
\end{aligned}
$$

3. Siden $y(x)$ er deriverbar for alle x, er de kritiske punktene gitt ved $y'(x) = 0$, dvs at kritisk punkt er $x = 0$. Siden $f''(0) = 0$, kan vi ikke bruke 2. deriverte-testen til å klassifisere dette punktet. Vi legger merke til at $y \to -\infty$ når $x \to -\infty$ og $y \to \infty$ når $x \to \infty$. Dermed er punktet $(0, y(0)) = (0, 0)$ et sadelpunkt.
4. Siden $y'(0) > 0$ for alle $x \neq 0$, øker funksjonen i intervallene $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$.
5. Vendepunktene er gitt ved $y''(x) = 0$. Siden nevneren er positiv for alle verider av x, løser vi $6x(-x^2+1) = 0$. Vi finner at det er vendepunkt i $x = -1, x = 0$ og $x = 1$.
6. Funksjonenen har ingen horisontale eller vertikale asymptoter. Siden teller og nevner er polynomer, og polynomet i telleren er av en grad høyere enn nevneren, har funksjonen en skeiv asymptote. Vi finner denne ved polynomdivisjon,

$$
\frac{x^3}{3x^2+1} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\frac{x}{3x^2+1},
$$

   og $y = 1/3\cdot x$ er en skrå asymptote for grafen.
7. Kurven skjærer aksene i punktet $(0, 0)$.



Figur 4: Oppgave 4.4.30. Skisse av grafen $y = x^3/(3x^2+1)$.

Avsnitt 4.5

33 Fra figur 5 har vi to likeformede trekanter og kan sette opp ligningen

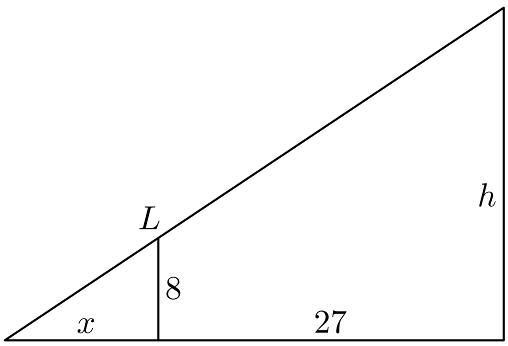
$$\frac{8}{x} = \frac{h}{x+27}.$$

Vi løser for h og får $h = 8 + \frac{216}{x}$. Pytagoras' setning gir oss at $L(x) = \sqrt{h^2 + (x+27)^2} = \sqrt{\left(8+\frac{216}{x}\right)^2 + (x+27)^2}$, der $x > 0$. La funksjonen f være gitt av $L(x) = \sqrt{f(x)}$. Siden kvadratrot-funksjonen er strengt voksende, så vil f og L nå minimum for samme x-verdi. Dermed holder det å finne x der $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\left(8+\frac{216}{x}\right)^2 + (x+27)^2\right) = 2\left(8+\frac{216}{x}\right)\left(-\frac{216}{x^2}\right) + 2(x+27) = 0$$

Denne ligningen kan skrives om til $(x+27)\left(1-\frac{1728}{x^3}\right) = 0$, som har to løsninger. Disse er $x = -27$ (som ikke er relevant, siden vi må ha $x > 0$) og $x = 12$. Dermed får vi

$$L(12) = \sqrt{2197} \approx 46{,}87 \text{ ft}.$$



Figur 5: Oppgave 4.5.33. Geometrisk oppstilling.

40 Fermats prinsipp i optikk sier at lys alltid beveger seg fra et punkt til et annet langs den banen som minimerer reisetiden. Studer figuren i oppgaveteksten. Vi skal vise at dersom lyset adlyder Fermats prinsipp, så må vinklene θ_1 og θ_2 være like. Merk at siden hastigheten er konstant så er minimal reisetid ekvivalent med minimal strekning.

Punktene A og B er gitt. Vi lar x-aksen ligge på speilet, og lar y-aksen gå gjennom A. Videre sier vi at punktet A har koordinater $(0, a)$ og punktet B har koordinater (d, b). Vi lar lyset treffe speilet i punktet x. Ved Pytagoras får vi da et avstanden lyset tilbakelegger er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Den verdien for x som gir kortest strekning er gitt ved ligningen $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d - x)}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = 0.$$

Siden $\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ og $\sin\theta_2 = \frac{(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, gir ligningen over at

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2.$$

Dette medfører at $\theta_1 = \theta_2$ fordi θ_1 og θ_2 tilhører intervallet $(0, \pi/2)$. Vi har vist at vinklene må være like.

$\boxed{48}$ Vi får oppgitt at det koster $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20000x$ å produsere x gjenstander. Vi skal minimere den gjennomsnittlige produksjonskostnaden $\frac{c(x)}{x} = x^2 - 20x + 20000$. Vi deriverer og får at

$$\left(\frac{c(x)}{x}\right)' = 2x - 20$$
$$\left(\frac{c(x)}{x}\right)'' = 2$$

Vi har at $\left(\frac{c(x)}{x}\right)' = 0 \iff x = 10$. Siden $\left(\frac{c(x)}{x}\right)'' = 2 > 0$, gir 2. deriverte-testen at $x = 10$ er et lokalt minimum for $\frac{c(x)}{x}$, dvs. at $x = 10$ er et produksjonsnivå som minimerer gjennomsnittskostnaden.

Avsnitt 4.6

$\boxed{2}$ Uttrykket $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$ er på den ubestemte formen $\frac{0}{0}$. Ved hjelp av l'Hopital-regelen får vi at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{1} = 5$.

$\boxed{40}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x+1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(3x+1)\sin x - x}{x\sin x}\right),$$

og dette er på den ubestemte formen $(0/0)$, så vi bruker L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(3x+1)\sin x - x}{x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3\sin x + (3x+1)\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\right),$$

og dette er fortsatt på "indeterminate form" $(0/0)$, så vi fortsetter:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3\sin x + (3x+1)\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3\cos x + 2\cos x - (3x+1)\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x}\right) =$$

$$= \frac{3 + 3 - 0}{1 + 1 - 0} = \frac{6}{2} = 3.$$

58 Merk at

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}} = \sqrt{\frac{1}{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}}}.$$

Uttrykket $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ er på "indeterminate form" 0/0, så vi bruker L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Videre får vi

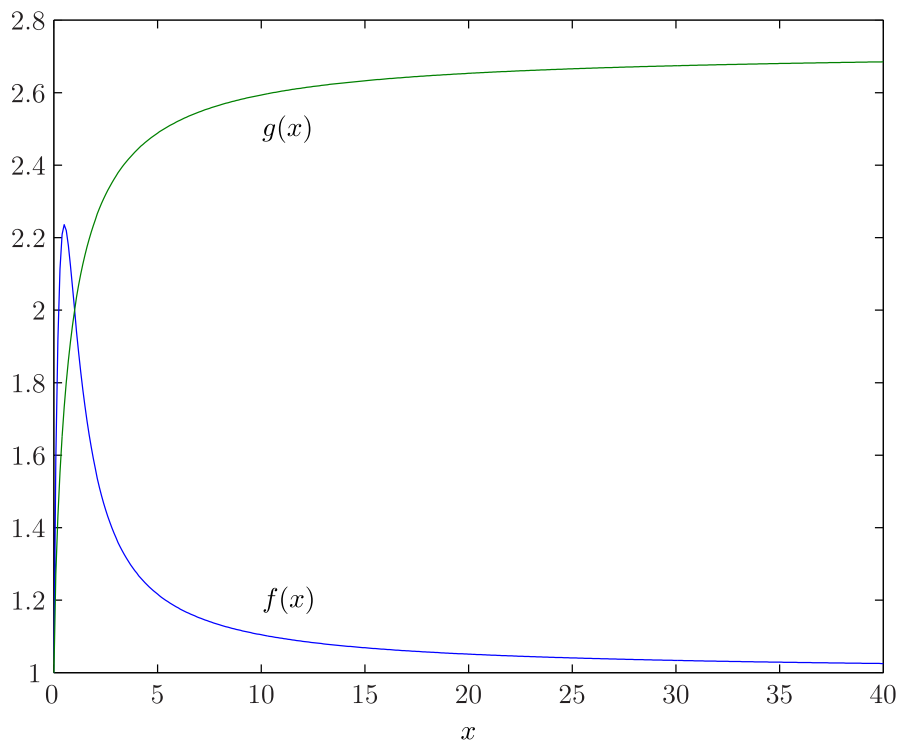
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1.$$

68 a) Uttrykket $\lim_{x\to\infty} \left(1+x^{-1}\right)^x$ er på den ubestemde forma 1^∞, så som i eksempel 7 på side 287 undersøker vi grenseverdien $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+x^{-1}\right)^x$. Ved hjelp av l'Hopital-regelen får ein at denne grensa er lik;

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+x^{-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^{-1})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2(1+x^{-1})}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^{-1}} = 1.$$

Grenseverdien til $\lim_{x\to\infty} \left(1+x^{-1}\right)^x$ blir difor lik;

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+x^{-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+x^{-1}\right)^x} = e^1 = e.$$



Figur 6: Oppgave 4.6.68 b)

b) Frå figur 6 kan ein observere at $g(x)$ går mot e^1, medan $f(x)$ ser ut til å gå mot 1 når x veks.

c) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ er på den ubestemde forma 1^∞, så som i oppgåve a) ser vi på $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + x^{-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+x^{-2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^3(1+x^{-2})}}{\frac{-1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x(1+\frac{1}{x^2})} = 0.$$

I 3. likskapsteikn er l'Hopital-regelen blitt brukt. Grenseverdien er difor;

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1.$$