Avsnitt 4.7

3 La $f(x) = x^4 + x - 3$ med $f'(x) = 4x^3 + 1$. Med $x_0 = -1$ får ein med Newtons metode at

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{-3}{-3} = -2$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -2 - \frac{11}{-31} = \frac{-51}{31}.$$

Med $x_0 = 1$ får ein med Newtons metode at

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{5} = \frac{6}{5}$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{6}{5} - \frac{171/625}{989/125} = \frac{5763}{4945}.$$

8 Vi vil estimere $\pi/2$ til fem desimalers nøyaktighet ved å anvende Newtons metode på ligningen $\cos x = 0$. Er valget av startverdi x_0 avgjørende for om Newtons metode gir riktig svar? Ja, fordi ligningen $\cos x = 0$ har mange løsninger. Tabell 1 nedenfor viser resultatene ved bruk av iterasjonsformelen

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos x}{\sin x}$$

for startverdiene $x_0^1 = 1/2$ og $x_0^2 = 4$. Vi ser at x_n^1 går mot $\pi/2$ når n vokser, mens x_n^2 går mot $3\pi/2$. Prøv selv og se hva som skjer hvis man for eksempel velger $x_0 = -1/2$.

n	x_n^1	x_n^2
0	$0,5$	4
1	$2,3305$	$4,8637$
2	$1,3896$	$4,7112$
3	$1,5731$	$4,7124$
4	$1,5708$	$4,7124$
5	$1,5708$	$4,7124$

Tabell 1: Ulike startverdier i Newtons metode gir forskjellige løsninger av ligningen $\cos x = 0$.

13 Vi vil finne $x \in (0, \pi/2]$ slik at

$$f(x) = \tan x - 2x = 0$$

ved Newtons metode. Den deriverte av funksjonen f er

$$f'(x) = \sec^2 x - 2.$$

Dermed finner vi iterasjonsformelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\tan(x_n) - 2x_n}{\sec^2(x_n) - 2}.$$

Tabell 2 lister x_n-verdier for startverdien $x_0 = 1$. Vi ser at $\tan x = 2x$ når $x = 1.1656$.

n	x_n
0	1
1	$1,3105$
2	$1,2239$
3	$1,1761$
4	$1,1659$
5	$1,1656$
6	$1,1656$

Tabell 2: Newtons metode anvendt på $f(x) = \tan x - 2x$, med startverdi $x_0 = 1$.

25 Ved å bruke MATLAB eller lommerreknar får ein følgjande iterasjonstabell (her har eg valt ei nøyaktigheit på 6 desimalar)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	2	1	40	1.975
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1.776329	$3.99\ldots \cdot 10^{-5}$	$0.002\ldots$	1.756921
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
40	1.363232	$2.555\ldots \cdot 10^{-18}$	$1.048\ldots \cdot 10^{-16}$	1.345297
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	1.079517	$1.043\ldots \cdot 10^{-44}$	$5.248 \cdot 10^{-42}$	1.077529
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Avsnitt 4.8

24 a) $f(x) = x - (\frac{1}{2})^x$. Bruker tabell [4.2 s. 297].

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\frac{1}{\ln(1/2)}) \cdot (\frac{1}{2})^x + c = \frac{1}{2}x^2 - (\frac{1}{\ln 1 - \ln 2}) \cdot (\frac{1}{2})^x + c =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - (-\frac{1}{\ln 2}) \cdot (\frac{1}{2})^x + c = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\ln 2} \cdot (\frac{1}{2})^x + c$$

b) $f(x) = x^2 + 2^x$.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x + c$$

c) $f(x) = \pi^x - x^{-1}$.

$$F(x) = (\frac{1}{\ln \pi})\pi^x - \ln|x| + c$$

76 Vi skal vise at $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{x}{x+1} + c$, så vi deriverer:

$$(\frac{x}{x+1} + c)' = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2},$$

og det er ok.

85 a) Dette er feil, fordi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^3}{3} + C\right) = \frac{3(2x+1)^2 \cdot 2}{3} = 2(2x+1)^2 \neq (2x+1)^2.$$

b) Dette er også feil, fordi

$$\frac{d}{dx}\left((2x+1)^3 + C\right) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 \neq 3(2x+1)^2.$$

c) Dette er riktig, da

$$\frac{d}{dx}\left((2x+1)^3 + C\right) = 6(2x+1)^2.$$

119

1. Vi er gitt differensialligningen

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -k,$$

hvor k er konstant. Ved antiderivasjon finner vi at

$$\frac{ds}{dt} = -kt + C_1,$$

og setter vi inn initialverdien $ds/dt = 88$ når $t = 0$ finner vi $C_1 = 88$. Vi antideriverer nok en gang, og får at

$$s(t) = -\frac{1}{2}kt^2 + 88t + C_2.$$

Fordi $s(0) = 0$ har vi at $C_2 = 0$.

2. Vi vil finne t slik at

$$\frac{ds}{dt} = -kt + 88 = 0.$$

Altså har vi at $ds/dt = 0$ når $t = 88/k$.

3. Vi vil finne k slik at

$$\begin{aligned} s\left(\frac{88}{k}\right) &= -\frac{1}{2}k \cdot \left(\frac{88}{k}\right)^2 + 88 \cdot \frac{88}{k} = 242 \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{242}{88^2} \\ \Rightarrow \quad & k = \frac{88^2}{2 \cdot 242} = 16 \end{aligned}$$

Tolkning: Dersom vi skal bremse ned fra 88 fot/sek til 0 fot/sek på 242 fot må vi ha en akselerasjon på -16 fot/sek^2.

Avsnitt 5.1

7 Med to rektangel får ein intervalla $[1, 3]$ og $[3, 5]$ med midtpunkt $x_1 = 2$ og $x_2 = 4$. Frå midtpunkt-regelen får ein at arealet under kurva $1/x$ på intervallet $[1, 5]$ kan tilnærmast ved

$$A \approx 1/2(3-1) + 1/4(5-3) = \frac{3}{2}.$$

Med fire rektangel får ein intervalla $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ og $[3, 5]$ med midtpunkt $x_1 = 3/2$, $x_2 = 5/2$, $x_3 = 7/2$ og $x_4 = 9/2$. Av midtpunkt-regelen får ein at arealet under kurva $1/x$ på intervallet $[1, 5]$ kan tilnærmast ved

$$A \approx 2/3(2-1) + 2/5(3-2) + 2/7(4-3) + 2/9(5-4) = 2/3 + 2/5 + 2/7 + 2/9 = 496/315.$$

19 a) Et øvre estimat er gitt ved $70 \cdot 1 + 97 \cdot 1 + 136 \cdot 1 + 190 \cdot 1 + 265 \cdot 1 = 758$ gal. Et nedre estimat er gitt ved $50 \cdot 1 + 70 \cdot 1 + 97 \cdot 1 + 136 \cdot 1 + 190 \cdot 1 = 543$ gal.

b) Et øvre estimat er gitt ved $70\cdot1+97\cdot1+136\cdot1+190\cdot1+265\cdot1+369\cdot1+516\cdot1+720\cdot1 = 2363$ gal. Et nedre estimat er gitt ved $50\cdot1+70\cdot1+97\cdot1+136\cdot1+190\cdot1+265\cdot1+369\cdot1+516\cdot1 = 1693$ gal.

c) I verste tilfelle er det $25000 - 2363 = 22637$ gal igjen i tankeren etter 8 timer. Det vil derfor ta $22637/720 \approx 31,4$ timer til til all oljen har lekket ut. I beste tilfelle er det $25000-1693 = 23307$ gal igjen i tankeren etter 8 timer. Det vil derfor ta $23307/720 \approx 32,4$ timer til til all oljen har lekket ut.

Avsnitt 5.2

14 $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = \sum_{i=1}^{5} 2i$.

18 d)

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - 1) = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 - n.$$

39 Lengden på et delintervall er gitt ved $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Den øvre summen er da gitt ved

$$\begin{aligned}
f(\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n} + f(\frac{2}{n}) \cdot \frac{1}{n} + \cdots f(\frac{n}{n}) \cdot \frac{1}{n} &= \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}) \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{5}{6} + \frac{6n+1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Grensen når $n \to \infty$ er da gitt ved

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{5}{6} + \frac{6n+1}{6n^2}) = \lim_{n\to\infty} (\frac{5}{6} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2}) = \frac{5}{6}.$$

Avsnitt 5.3

6 Grenseverdien til Riemann-summen er

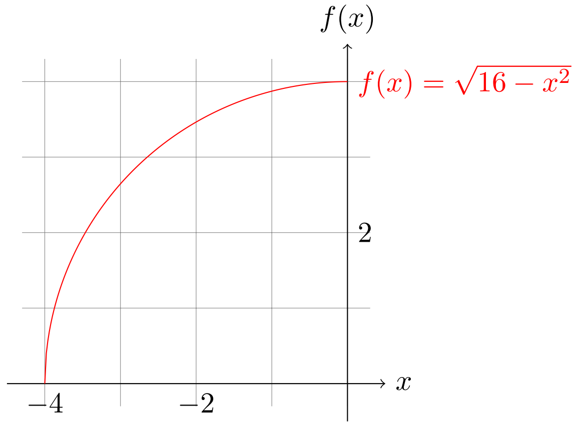
$$\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

18 Vi skal integrere funksjonen

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

over intervallet $[-4, 0]$. I Figur 1 ser vi at dette integralet svarer til arealet av en kvart sirkelskive med radius $r = 4$. Altså har vi at

$$\int_{-4}^{0} \sqrt{16 - x^2} dx = \frac{1}{4}\pi \cdot 4^2 = 4\pi.$$



Figur 1: Oppgave 5.3.18

$\boxed{64}$ Merk at $f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$, så polynomet er null i punkta $x \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Sidan $f(1) = f(-1) < 0$ følgjer at $f(x) \le 0$ for $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Det er klart at integralet vil vere minmalt dersom ein integrerer over dei x der $f(x) \le 0$. Integralet er minimalt for $a = -\sqrt{2}$ og $b = \sqrt{2}$.

$\boxed{68}$ Merk at $\sqrt{x+8}$ er monotont voksande for $x \in [0,1]$. Frå tabell 5.3 regel 6 følgjer at

$$\min_{x\in[0,1]} \sqrt{x+8}(1-0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \le \int_0^1 \sqrt{x+8}\, dx \le \max_{x\in[0,1]} \sqrt{x+8}(1-0) = \sqrt{9} = 3.$$

Eksamensoppgaver

$\boxed{19}$ Vi skal vise ved induksjon at

$$P_n: \quad (\cos u)(\cos 2u)(\cos 4u)(\cos 8u)\cdots[\cos(2^{n-1}u)] = \frac{\sin(2^n u)}{2^n \sin u}$$

for alle hele tall $n \ge 1$. Vi må først sjekke at formelen er riktig når $n = 1$ slik at P_1 er sann. Setter vi $n = 1$ i P_n, har produktet på venstre side bare en faktor, og formelen reduserer seg til

$$P_1: \quad \cos u = \frac{\sin 2u}{2\sin u},$$

som er riktig siden $\sin 2u = 2\sin u \cos u$. Vi antar så, som induksjonshypotese, at P_n er sann for $n = k$, dvs.

$$P_k: \quad (\cos u)(\cos 2u)(\cos 4u)(\cos 8u)\cdots[\cos(2^{k-1}u)] = \frac{\sin(2^k u)}{2^k \sin u}.$$

Vi må vise at da er P_n sann for $n = k+1$, altså

$$P_{k+1}: \quad (\cos u)(\cos 2u)(\cos 4u)(\cos 8u)\cdots[\cos(2^k u)] = \frac{\sin(2^{k+1} u)}{2^{k+1} \sin u}.$$

Det gjør vi ved å bruke induksjonshypotesen og identiteten $\sin v \cos v = \frac{1}{2}\sin 2v$:

$$
\begin{aligned}
(\cos u)(\cos 2u)(\cos 4u)\cdots[\cos(2^k u)] &= (\cos u)(\cos 2u)(\cos 4u)\cdots[\cos(2^{k-1}u)][\cos(2^k u)] \\
&= \frac{\sin(2^k u)}{2^k \sin u}\cdot\cos(2^k u) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sin(2\cdot 2^k u)}{2^k \sin u} \\
&= \frac{\sin(2^{k+1}u)}{2^{k+1}\sin u}.
\end{aligned}
$$

Ved induksjon følger det at formelen gjelder for alle hele tall $n \geq 1$.