Avsnitt 5.4

10

$$\int_0^\pi (1+\cos x)dx = \int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + (\sin\pi - sin 0) = \pi.$$

44 Vi vil finne

$$\frac{d}{dx}(\int_0^{x^2} \cos\sqrt{t}\, dt).$$

Merk at integralet går fra 0 til x^2, så y er sammensetningen av funksjonene $y = \int_0^u cos\sqrt{t}\,dt$ og $u = x^2$, så vi må bruke kjerneregelen. Vi har at

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (\frac{d}{du}\int_0^u cos\sqrt{t}\, dt)\cdot\frac{du}{dx} = \cos\sqrt{u}\cdot 2x = 2x\cos x.$$

58 Først regner vi ut arealet under $y = \sin x$ ved integralregning.

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/5} \sin x\, dx = [-\cos x]_{\pi/6}^{5\pi/6} = (-\cos(5\pi/6) - (-\cos(\pi/6))) = \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}.$$

Vi trekker så ifra arealet av det hvite rektangelet under området vi skal regne ut arealet av (det hvite) [se tegning i boka]. Dette rektangelet har areal $((5\pi/6) - (\pi/6))\cdot\sin(\pi/6) = 2\pi/3\cdot(1/2) = \pi/3$. Dermed får vi at arealet er $\sqrt{3} - \pi/3$.

80(1) Ny versjon av boka.

a) La $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ vere ei vilkårleg partisjonering av $[a, b]$. Då får ein;

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \cdots \\ &+ F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

b) Av middelverdisetninga på side 247 får ein

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i)$$

for ein $x_{i-1} < c < x_i$. Sidan $F'(x) = f(x)$ får ein ved å multiplisere begge sider med $x_i - x_{i-1}$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Av dette får ein

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

der $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ er ein partisjonering av $[a, b]$ og sidan kvar c_i ligg i intervallet $[x_{i-1}, x_i]$ er $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ ein Riemann-sum for f på $[a, b]$.

c) La $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ betegne Riemann summen av f på intervallet $[a, b]$ med ein partisjon $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$. Sidan f er kontinuerleg på $[a, b]$ følger av theorem 1 på side 334 at det bestemte integralet over $[a, b]$ finnes og

$$\lim_{||P||\to 0} S_P = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Av b) følgjer at $S_P = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$ og a) gir at S_P er lik $F(b) - F(a)$ for alle partisjonar P. Vi får difor

$$F(b) - F(a) = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = \lim_{||P||\to 0} S_P = \int_a^b f(x)\, dx.$$

80(2) Gammel versjon av boka.

a) Sant. Ved Teorem 1 på side 130 i boka er f kontinuerlig siden f er deriverbar. Ved Teorem 4 på side 346 i boka følger det at h er deriverbar med derivert $h'(x) = f(x)$, som igjen er deriverbar. Følgelig er h en to ganger deriverbar funksjon av x.

b) Sant. Siden både h og h' er deriverbare, er de kontinuerlige ved Teorem 1 på side 130 i boka.

c) Sant. Vi har at $h'(1) = f(1) = 0$. Det følger at grafen til h har en horisontal tangent i $x = 1$.

d) Sant. Vi har at $h'(1) = f(1) = 0$, og at $h''(x) = f'(x) < 0$ for alle x. Det følger ved 1. deriverte-testen på side 256 at h har et lokalt maksimum i $x = 1$. Merk: vi kan ikke bruke 2. deriverte-testen siden vi ikke vet om h'' er kontinuerlig i $x = 1$.

e) Usant. Se d).

f) Usant. Vi har at $h''(x) = f'(x) < 0$ for alle x.

g) Sant. Vi har at $\frac{dh}{dx}(1) = f(1) = 0$, og at $f'(x) < 0$ for alle x. Det følger at grafen til $\frac{dh}{dx}$ krysser x-aksen i $x = 1$.

Avsnitt 5.5

8

$$\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y).$$

Setter $u = y^4 + 4y^2 + 1$, så $du = 4y^3 + 8y\, dy = 4(y^3 + 2y)\, dy$, og dermed er $(y^3 + 2y)\, dy = (1/4)\, du$.

$$\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y)\, dy = 12\int u^2(1/4)\, du = 3\int u^2\, du =$$

$$= 3 \cdot (1/3)u^3 + c = u^3 + c = (y^4 + 4y^2 + 1)^3 + c.$$

20

$$\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Sett $u = 1 + \sqrt{x}$, så $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, og dermed er $\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,du$.

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx = \int u^3 \cdot 2\,du = (2/4)u^4 + c = (1/2)(1+\sqrt{x})^4 + c.$$

$\boxed{38}$

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$$

Sett $u = \sqrt{x^2+1}$, så $u^2 = x^2+1$ og dermed er $2u\,du = 2x\,dx$, dvs. $u\,du = x\,dx$. Merk også at $x^2 = u^2 - 1$.

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx \int x^2\sqrt{x^2+1}\cdot x\,dx = \int (u^2-1)u \cdot u\,du =$$

$$\int u^4 - u^2\,du = (1/5)u^5 - (1/3)u^3 + c = (1/5)(\sqrt{x^2+1})^5 - (1/3)(\sqrt{x^2+1})^3 + c$$

$\boxed{68}$ Ved å bruke at $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ får ein

$$\frac{\tan^2 x}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x} + C = \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} + C.$$

Sidan $C' = C - \frac{1}{2}$ er ein konstant og $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ får ein

$$\frac{\tan^2 x}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C'.$$

Begge integrasjonane i oppgåva er korrekte.

Avsnitt 5.6

$\boxed{8}$ For enkelhets skyld, regner vi først ut det ubestemte integralet før vi evaluerer. Sett $u = 1 + v^{3/2}$, så $du = (3/2)v^{1/2}\,dv$, og dermed er $\sqrt{v}\,dv = (2/3)\,du$.

$$\int \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv = \int \frac{10}{u^2}(2/3)du = (20/3)\int u^{-2}\,du =$$

$$= (20/3)\cdot(1/(-2+1))u^{-1} + c = (-20/3)\frac{1}{(1+v^{3/2})} + c.$$

a)

$$\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv = [(-20/3)\frac{1}{(1+v^{3/2})}]_0^1 =$$

$$= ((-20/3)\frac{1}{1+1^{3/2}} - ((-20/3)\frac{1}{1+0^{3/2}})) = (-20/6) + (40/6) = 20/6 = 10/3.$$

b)

$$\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv = [(-20/3)\frac{1}{(1+v^{3/2})}]_1^4 =$$

$$= ((-20/3)\frac{1}{1+4^{3/2}} - ((-20/3)\frac{1}{1+1^{3/2}})) =$$

$$= (-20/3)\frac{1}{1+4^{3/2}} + (20/3)\cdot(1/2) = (-20/27) + (20/6) = (70/27).$$

25 La $u = \tan\theta$. En får $\frac{du}{d\theta} = \sec^2\theta$, så $du = \sec^2\theta d\theta$. Ved å substituere får en

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} (1+e^{\tan\theta})\sec^2\theta d\theta &= \int_0^1 1+e^u du = [u+e^u]_0^1 \\ &= 1+e-1 = e.\end{aligned}$$

40

$$\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1+\ln^2 t)}.$$

Sett $u = \ln t$, så $du = 1/t\,dt$. Vi får da

$$\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,dt}{t(1+\ln^2 t)} = 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+u^2}\,du = 4[\arctan u]_0^{\pi/2} =$$

$$= 4(\arctan(\pi/4) - \arctan 0) = 4\arctan(\pi/4).$$

107 Arealet mellom parabelen og linja $y = a^2$ er

$$A = 2\int_0^a (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) - 0 = \frac{4a^3}{3}.$$

Arealet av trekanten AOC er $B = \frac{1}{2}(2a)(a^2) = a^3$. Grensen av forholdet mellom B og A når a går mot 0 er

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{B}{A} = \lim_{a\to 0^+} \frac{a^3}{4a^3/3} = \frac{3}{4},$$

som er uavhengig av a.

114 a) Vi har at $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$. Vi ser på integralet $\int_{-a}^0 f(x)dx$. La $u = -x$. Vi får $\frac{du}{dx} = -1$, så $du = -dx$. Ved å substituere får vi

$$\begin{aligned}\int_{-a}^0 f(x)dx &= \int_a^0 -f(-u)du = \int_a^0 f(u)du \text{ (siden } f \text{ er odde)} \\ &= -\int_0^a f(u)du.\end{aligned}$$

Det følger at $\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$.

Avsnitt 5.7

20 La $u = -1/x^2$. En får $\frac{du}{dx} = \frac{2}{x^3}$ så $\frac{du}{2} = \frac{dx}{x^3}$. Ved å substituere får en

$$\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \int \frac{e^u}{2}\,du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{-1/x^2}}{2} + C.$$

55 Vi ser først på integralet $\int_1^a \ln x\,dx$. La $u = \ln x$. En får at $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{e^u}$. Ved å substituere får en

$$\int_1^a \ln x\,dx = \int_0^{\ln a} ue^u\,du$$

Det følger at

$$\int_1^a \ln x \, dx + \int_0^{\ln a} e^y \, dy = \int_0^{\ln a} (z+1)e^z \, dz$$

La $u = ze^z$. En får $\frac{du}{dz} = (z+1)e^z$. Vi substituerer og får

$$\int_0^{\ln a} (z+1)e^z \, dz = \int_0^{a \ln a} du = a \ln a.$$

Eksamensoppgaver

$\boxed{2}$ Merk at $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Vi bruker delbrøksoppspaltning:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-2)(x-1)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \\ x &= A(x-1) + B(x-2) \end{aligned}$$

Med $x = 1$ får vi at $B = -1$ og med $x = 2$ får vi at $A = 2$. Det følger at

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} dx \\ &= 2 \ln |x-2| - \ln |x-1| + C = \ln \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + C. \end{aligned}$$