Avsnitt 6.1

23 La $R(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Volumet av omdreiningslegemet er

$$V = \int_0^1 \pi R(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x = \pi \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2}).$$

34 Ved å bruke disk-metoden får man at volumet er

$$V = \int_0^1 \pi [R(y)]^2 \, dy = \int_0^1 \pi \left(\frac{\sqrt{2y}}{y^2+1} \right)^2 dy = \int_0^1 \pi \frac{2y}{(y^2+1)^2} \, dy$$

La $u = y^2 + 1$. En får $\frac{du}{dy} = 2y$. Ved å substituere får en

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{u^2} \, du = \pi \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

39 Kurvene $y = x + 3$ og $y = x^2 + 1$ skjærer hverandre i $x = 2$ og $x = -1$, og $x^2 + 1 < x + 3$ for $x \in (-1, 2)$. Indre radius til legemet er dermed gitt ved $r(x) = x^2 + 1$ og ytre radius ved $R(x) = x + 3$. Ved å bruke washer-metoden får man at volumet er

$$V = \pi \int_{-1}^2 [R(x)]^2 - [r(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-1}^2 (x+3)^2 - (x^2+1)^2 \, dx = \frac{117\pi}{5}.$$

52 a) Ved å bruke disk-metoden får man at volumet er

$$V = \pi \int_0^b (-\frac{h}{b}x + h)^2 \, dx = \pi \left[\frac{h^2}{3b^2}x^3 - \frac{h^2}{b}x^2 + h^2 x \right]_0^b = \frac{h^2 b\pi}{3}.$$

b) Ved å bruke disk-metoden får man at volumet er

$$V = \pi \int_0^h (-\frac{b}{h}y + b)^2 \, dy = \pi \left[\frac{b^2}{3h^2}y^3 - \frac{b^2}{h}y^2 + b^2 y \right]_0^h = \frac{b^2 h\pi}{3}.$$

Avsnitt 6.2

3 Vi bruker sylinderskall-metoden med radius y og høyde y^2 og får

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} y \cdot y^2 \,\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} y^3 \,\mathrm{d}y = 2\pi \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

32 Kurvene $y = 2x - x^2$ og $y = x$ skjærer hverandre i $x = 0$ og $x = 1$, og $2x - x^2 > x$ for $x \in (0, 1)$.

a) Ved å bruke sylinderskall-metoden med radius x og høyde $2x - x^2 - x = x - x^2$ får man at volumet er lik

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\, dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

b) Ved å bruke sylinderskall-metoden med radius $1 - x$ og høyde $2x - x^2 - x = x - x^2$ får man at volumet er lik

$$V = 2\pi \int_0^1 (1 - x)(x - x^2)\, dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

36 Merk at man ikke kan bruke disk-metoden. Vi kan bruke washer-metoden med indre radius

$$r(y) = \begin{cases} (-y)^{1/4} & \text{når } y \in [-1, 0] \\ y^{1/2} & \text{når } y \in [0, 1] \end{cases}$$

og ytre radius $R(y) = 1$ slik at

$$V = \pi \int_{-1}^0 1^2 - [(-y)^{1/4}]^2\, dy + \pi \int_0^1 1^2 - (y^{1/2})^2\, dy = \pi \int_{-1}^0 1 - (-y)^{1/2}\, dy + \pi \int_0^1 1 - y\, dy,$$

eller vi kan bruke sylinderskall-metoden med radius x og høyde $x^2 - (-x^4) = x^2 + x^4$ slik at

$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot (x^2 + x^4)\, dx = 2\pi \int_0^1 x^3 + x^5\, dx.$$

39 Ved å bruke sylinderskall-metoden med radius x og høyde e^{-x^2} blir uttrykket for volumet

$$V = 2\pi \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx.$$

Ved å bruke Teorem 6 på side 360 i boka med $u = g(x) = x^2$ og $\frac{du}{dx} = g'(x) = 2x$ blir verdien av integralet lik

$$V = \pi \int_{g(0)}^{g(1)} e^{-u}\, du = \pi \left[-e^{-u} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

Avsnitt 6.3

4 La $x = f(t) = t^2/2$ og $y = g(t) = (2t+1)^{3/2}/3$. Da er $f'(t) = t$ og $g'(t) = (2t+1)^{1/2}$. Både $f'(t)$ og $g'(t)$ er kontinuerlige og ikke samtidig lik 0 på $(0, 4)$. Fra definisjonen på side 409 i boka er lengden til kurven gitt ved

$$L = \int_0^4 \sqrt{t^2 + (2t+1)}\, \mathrm{d}t = \int_0^4 \sqrt{(t+1)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^4 (t+1)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + t \right]_0^4 = 12.$$

8 La $x = f(t) = e^t \cos t$ og $y = g(t) = e^t \sin t$. Da er $f'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$ og $g'(t) = e^t(\cos t + \sin t)$. Både $f'(t)$ og $g'(t)$ er kontinuerlige og ikke samtidig lik 0 på $(0, \pi)$. Fra definisjonen på side 409 i boka er lengden til kurven gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\cos t + \sin t)^2}\, dt \\ &= \int_0^\pi e^t \sqrt{\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t}\, dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2} e^t\, dt = \sqrt{2}(e^\pi - 1). \end{aligned}$$

34 La $f(\theta) = a(\theta - \sin\theta)$ og $g(t) = a(1 - \cos\theta)$. Da er $f'(\theta) = a(1 - \cos\theta)$ og $g'(\theta) = a \sin\theta$. Både f' og g' er kontinuerlige og f' er forskjellig fra 0 på $(0, 2\pi)$. Fra definisjonen på side 409 i boka er lengden til cycloiden gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}\, d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta \\ &= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

Ved å bruke de trigonometriske identitetene (3) og (5) på side 26 i boka får man

$$L = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a.$$

36 a) La $x = f(t) = \cos 2t$ og $y = g(t) = \sin 2t$. Da er $f'(t) = -2\sin 2t$ og $g'(t) = 2\cos 2t$. Både f' og g' er kontinuerlige og ikke samtidig lik 0 på $[0, \pi/2]$. Fra definisjonen på side 409 i boka er lengden til kurven gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}\, dt = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t}\, dt = 2\int_0^{\pi/2} 1\, dt \\ &= \pi. \end{aligned}$$

b) La $x = f(t) = \sin \pi t$ og $y = g(t) = \cos \pi t$. Da er $f'(t) = \pi \cos \pi t$ og $g'(t) = -\pi \sin \pi t$. Både f' og g' er kontinuerlige og ikke samtidig lik 0 på $[-1/2, 1/2]$. Fra definisjonen på side 409 i boka er lengden til kurven gitt ved

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{(\pi\cos\pi t)^2 + (-\pi\sin\pi t)^2}\, dt = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\cos^2 \pi t + \sin^2 \pi t}\, dt = \pi \int_{-1/2}^{1/2} 1\, dt \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Avsnitt 6.4

17 Siden $x = y^3/3$ har vi at $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = y^2$. Formelen på side 417 i boka gir oss at overflatearealet blir

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{y^3}{3}\sqrt{1+y^4}\,\mathrm{d}y.$$

La $u = 1 + y^4$. Da har vi at $\mathrm{d}u/4 = y^3\mathrm{d}y$. Substitusjon gir

$$S = \frac{2\pi}{3}\int_1^2 \frac{1}{4}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{9}(\sqrt{8}-1).$$

28 Ved å bruke definisjonen på side 416 i boka med $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ og $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ får man følgende uttrykk for arealet av overflaten:

$$S = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2-x^2}{r^2-x^2}+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$
$$= 2\pi r \int_a^{a+h} \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi rh.$$

Observer at arealet av overflaten $S = 2\pi rh$ er uavhengig av a.

29 Ved å bruke formelen på side 417 i boka med $x = \sqrt{R^2-y^2}$ og $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}$ får man følgende uttrykk for arealet av overflaten (a er y-verdien til det nederste planet):

$$S = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2-y^2}\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)^2}\,dy = 2\pi \int_a^{a+h} \sqrt{R^2-y^2}\sqrt{\frac{R^2-y^2}{R^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-y^2}}\,dy$$
$$= 2\pi R \int_a^{a+h} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dy = 2\pi Rh.$$

40 Ved å bruke formelen på side 418 i boka med $x = ht$, $y = rt$, $\frac{dx}{dt} = h$ og $\frac{dy}{dt} = r$ får man følgende uttrykk for arealet av overflaten:

$$S = 2\pi \int_0^1 rt\sqrt{h^2+r^2}\,dt = \pi r\sqrt{h^2+r^2}.$$

Vi sjekker resultatet med den geometriske formelen: Arealet $= \pi r$(skrå høyde): Arealet $= \pi r\sqrt{r^2+h^2} = S$.