Avsnitt 6.5

1 a) En har at $y' = -e^{-x}$, så $2y' + 3y = -2e^{-x} + 3e^{-x} = e^{-x}$.

b) En har at $y' = -e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-(3/2)x}$, så $2y' + 3y = -2e^{-x} - 3e^{-(3/2)x} + 3e^{-x} + 3e^{-(3/2)x} = e^{-x}$.

c) En har at $y' = -e^{-x} - \frac{3}{2}Ce^{-(3/2)x}$, så $2y' + 3y = -2e^{-x} - 3Ce^{-(3/2)x} + 3e^{-x} + 3Ce^{-(3/2)x} = e^{-x}$.

14 Vi skal løse differensialligninga $\sqrt{2xy}\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$. For at kvadratrota skal være veldefinert og for å få en mulig løsning må vi anta at $xy > 0$. Anta først at $x > 0$ og $y > 0$. Da får vi

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2xy}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1\\
\sqrt{2y}\,\mathrm{d}y &= \mathrm{d}x/\sqrt{x}\\
\sqrt{2}\int y^{1/2}\,\mathrm{d}y &= \int x^{-1/2}\mathrm{d}x\\
\frac{2\sqrt{2}}{3}y^{3/2} &= 2x^{1/2} + C_1\\
y &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x} + C\right)^{2/3}.
\end{aligned}
$$

Hvis vi heller antar at $x < 0$ og $y < 0$, så gir samme type beregning svaret

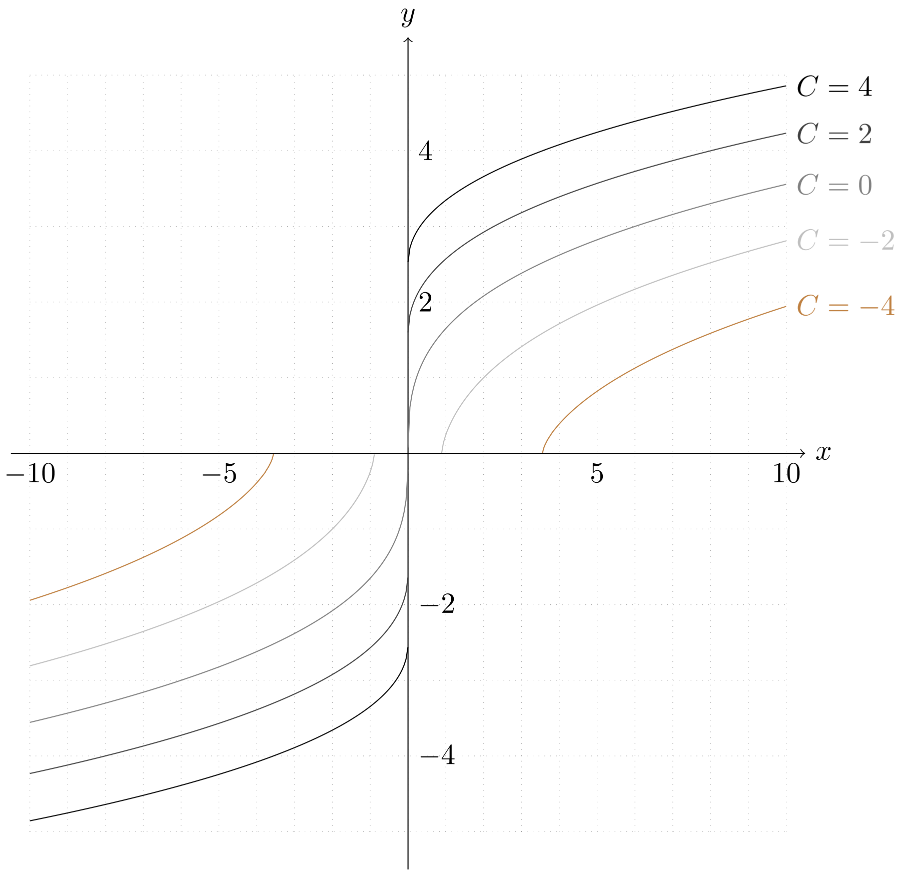
$$
y = -\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{-x} + C\right)^{2/3}.
$$

Merk at hvis vi velger $C < 0$, så er løsningen kun definert for de x-verdiene slik at $|x| > 2C^2/9$. Selv om de 2 uttrykkene for y er definert for henholdsvis positive og negative x, uavhengig av C, har vi antatt at det som opphøyes i $2/3$ er større eller lik null når vi gjorde den siste overgangen for å få dette eksplisitte uttrykket for y. I tillegg må uttrykket være større enn null siden $y = 0$ ikke er tillatt i den originale differensialligningen. For $C \geq 0$ er løsningene definert for alle $x \neq 0$.

Et utvalg løsninger er vist i figuren nedenfor.

35 a) La $H(t)$ være temperaturen av suppen etter tid t og $H_S = 20$ være temperaturen i rommet. Først må man finne konstanten k. Ved å bruke ligning 9 på side 427 med $H = H(10) = 60$, $H_0 = H(0) = 90$ og $t = 10$ gir dette

$$
\begin{aligned}
H(10) - H_S &= (H(0) - H_S)e^{-k10}\\
60 - 20 &= (90 - 20)e^{-10k}\\
\frac{4}{7} &= e^{-10k}.
\end{aligned}
$$



Figur 1: Oppgave 6.5.14

Ved hjelp av logaritmen får man at $k = -\frac{1}{10}\ln\frac{4}{7} = \frac{1}{10}\ln\frac{7}{4}$. Neste steg er å finne tidspunktet t_1 slik at $H(t_1) = 35$. Ved å bruke ligning 9 på side 427 får man

$$\begin{aligned} H(t_1) - H_S &= (H(0) - H_S)e^{-kt_1} \\ 35 - 20 &= (90 - 20)e^{-kt_1} \\ t_1 &= -\frac{1}{k}\ln\frac{15}{70} = \frac{1}{k}\ln\frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Ved å sette inn $k = \frac{1}{10}\ln\frac{7}{4}$ får man

$$t_1 = \frac{1}{\frac{1}{10}\ln\frac{7}{4}}\ln\frac{14}{3} = \frac{10}{\ln\frac{7}{4}}\ln\frac{14}{3} \approx 27.5$$

Tiden det tar for suppen å kjølne fra 60 til 35 grader er derfor $27.5 - 10 = 17.5$ minutt.

b) Konstanten k er den samme som i forrige oppgave. La t_2 være tidspunktet da suppen er $H(t_2) = 35$ grader og la $H_S = -15$. Ved å bruke ligning 9 på side 427 får man

$$\begin{aligned} H(t_2) - H_S &= (H(0) - H_S)e^{-kt_2} \\ 35 - (-15) &= (90 - (-15))e^{-kt_2} \\ t_2 &= -\frac{1}{k}\ln\frac{50}{105} \approx 13.26. \end{aligned}$$

Det tar med andre ord 13.26 minutt for suppen å kjølne fra 90 til 35 grader i en fryser med temperatur -15 grader.

Avsnitt 6.6

$\boxed{11}$ Definisjon på side 431 gir

$$\text{Work} = \int_a^b F(x)\,dx,$$

hvor $F(x)$ er kraften i punktet $x \in [a,b]$. La b være høyden av sylinderen før kompresjon, og a høyden etter kompresjon. Trykket p er avhengig av volumet i beholderen. Siden grunnflata er konstant, kan p derfor skrives på formen $p(V) = p(Ax)$, der x er høyden på beholderen. Ved hjelp av hintet i oppgaven og substitusjonsformelen på side 360 med $V(x) = Ax$, $V'(x) = A$ gir dette

$$\text{Work} = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b p(V(x))A\,dx = \int_a^b p(Ax)A\,dx = \int_{V(a)}^{V(b)} p(V)\,dV = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

$\boxed{12}$ Siden $pV^{1.4} = k$, kan vi definere trykket p som en funksjon av V ved formelen $p(V) = \frac{k}{V^{1.4}} = kV^{-1.4}$. Ved å bruke $p_1 = 50$ og $V_1 = 243$ får man at $k = 50 \cdot 243^{1.4}$. Integralet i oppgave 6.6.11 gir at arbeidet utført ved å komprimere gassen fra tilstand (p_1, V_1) til (p_2, V_2) er gitt ved

$$\text{Work} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = \int_{243}^{32} kV^{-1.4}\,dV = 50 \cdot 243^{1.4}\left[-\frac{1}{0.4}V^{-0.4}\right]_{243}^{32} = -37968.75.$$

$\boxed{35}$ Arbeidet er

$$\int_{6\,370\,000\,\mathrm{m}}^{35\,780\,000\,\mathrm{m}} \frac{1000\,\mathrm{kg}\cdot MG}{r^2}\,\mathrm{d}r = 1000\,\mathrm{kg}\cdot MG\left[-\frac{1}{r}\right]_{6\,370\,000\,\mathrm{m}}^{35\,780\,000\,\mathrm{m}} \approx 5{,}144 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}.$$

Avsnitt 6.7

$\boxed{4}$ Parablene skjærer hverandre i $x = -1$ og $x = 1$. Området er symmetrisk om y-aksen, så $\bar{x} = 0$. Vi deler opp området i vertikal remser og får

$$\begin{aligned}
(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \left(x, \tfrac{1}{2}(-2x^2 + x^2 - 3)\right) = \left(x, -\tfrac{1}{2}(x^2+3)\right)\\
\text{Lengde} &= -2x^2 - (x^2 - 3) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)\\
\text{Bredde} &= \mathrm{d}x\\
\text{Areal} &= \mathrm{d}A = 3(1-x^2)\,\mathrm{d}x\\
\text{Masse} &= \mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A = 3\delta(1-x^2)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Videre får vi

$$\begin{aligned}
M &= \int \mathrm{d}m = \int_{-1}^{1} \delta(-3x^2+3)\,\mathrm{d}x = \delta[-x^3+3x]_{-1}^{1} = 4\delta\\
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = -\frac{3\delta}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+3)(1-x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{3\delta}{2}\int_{-1}^{1}(-x^4-2x^2+3)\,\mathrm{d}x = \frac{-32\delta}{5}
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\bar{x} = 0, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{-32\delta/5}{4\delta} = -\frac{8}{5}.$$

13 Vi deler opp området i vertikal remser og får

$$\begin{aligned}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \left(x, \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ \text{Lengde} &= \frac{1}{\sqrt{x}}\\ \text{Bredde} &= \mathrm{d}x\\ \text{Areal} = \mathrm{d}A &= \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ \text{Masse} = \mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A &= \frac{\delta}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

M, M_x og M_y er gitt ved

$$\begin{aligned}M &= \int \mathrm{d}m = \delta \int_1^{16} x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2\delta[x^{1/2}]_1^{16} = 6\delta\\ M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \frac{\delta}{2}\int_1^{16} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2}(\ln 16 - \ln 1) = \delta \ln 4\\ M_y &= \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \delta \int_1^{16} x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\delta}{3}[x^{3/2}]_1^{16} = 42\delta\end{aligned}$$

Platens massesentrum er dermed

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right) = \left(7, \frac{\ln 4}{6}\right) = \left(7, \frac{\ln 2}{3}\right).$$

17 Løser oppgaven ved å bruke vertikale remser. La x være et vilkårlig punkt i intervallet $[1, 16]$. Da er

$$\begin{aligned}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= (x, \frac{1}{2\sqrt{x}})\\ \text{Lengde} &= \frac{1}{\sqrt{x}}\\ \text{Bredde} &= dx\\ \text{Areal} = dA &= \frac{1}{\sqrt{x}}dx\\ \text{Masse} = dm = \delta(x)dA &= \frac{4}{x}dx\end{aligned}$$

M, M_x og M_y er gitt ved

$$\begin{aligned}M &= \int dm = \int_1^{16} \frac{4}{x}\,dx = [4\ln x]_1^{16} = 4\ln 16\\ M_x &= \int \tilde{y}\,dm = \int_1^{16} \frac{2}{x^{3/2}}\,dx = \left[-\frac{4}{\sqrt{x}}\right]_1^{16} = 3\\ M_y &= \int \tilde{x}\,dm = \int_1^{16} 4\,dx = 60\end{aligned}$$

Platens massesentrum er dermed

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}) = (\frac{15}{\ln 16}, \frac{3}{4\ln 16}).$$

31 Vi har at

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$$
$$dm = \delta ds$$

M, M_x og M_y er gitt ved

$$M = \int dm = \int \delta\, ds = \delta \cdot \text{lengde}$$
$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \delta \int y\, ds$$
$$M_y = \int \tilde{x}\, dm = \delta \int x\, ds$$

Koordinatene til sentroiden er dermed

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}) = (\frac{\int x\, ds}{\text{lengde}}, \frac{\int y\, ds}{\text{lengde}}).$$

Avsnitt 7.1

6 La $u = \ln x$ og $\mathrm{d}v = x^3\,\mathrm{d}x$. Da får vi at $v = x^4/4$ og $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$, og bruker delvis integrasjon:

$$\int_1^{\mathrm{e}} u\,\mathrm{d}v = [uv]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}[x^4 \ln x]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{1}{16}(\mathrm{e}^4 - 1) = \frac{3\mathrm{e}^4 + 1}{16}.$$

37 Gjennomsnittsverdien av y på intervallet $[0, 2\pi]$ er gitt ved

$$av = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2e^{-t}\cos t\, dt.$$

Vi ser på integralet

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-t}\cos t\, dt.$$

La $u = e^{-t}$ og $v = \sin t$. Ved å bruke delvis integrasjonsformelen på side 449 får man

$$I = \left[e^{-t}\sin t\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -e^{-t}\sin t\, dt = \int_0^{2\pi} e^{-t}\sin t\, dt.$$

Ved samme fremgangsmåte får man ved å sette $u = e^{-t}$ og $v = -\cos t$ at

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-t}\sin t\, dt = \left[-e^{-t}\cos t\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-t}\cos t\, dt = 1 - e^{-2\pi} - I.$$

Det følger at

$$I = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi}).$$

Dermed er

$$av = \frac{1}{\pi}I = \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi}).$$

44 Formel (4) gir

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \int \tan y \, dy,$$

der $y = \tan^{-1} x$. Ved å bruke $\tan y = \frac{\sin y}{\cos y}$, og substitusjonen $u = \cos y$, $du = -\sin y \, dy$, får man

$$\begin{aligned}\int \tan y \, dy &= \int \frac{\sin y}{\cos y} \, dy = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln |u| + C \\ &= -\ln |\cos y| + C = -\ln |\cos (\tan^{-1} x)| + C.\end{aligned}$$

I siste likhetstegnet er det brukt at $y = \tan^{-1} x$. Uttrykket $\cos (\tan^{-1} x)$ kan forenkles ved hjelp av følgende argument: Betrakt en rettvinklet trekant (f.eks. på side 23 i læreboka) hvor hypotenus har lengde 1. La motstående (opposite) katet ha lengde o og hosliggende katet (adjacent) lengde a. Velg o og a slik at $\frac{o}{a} = x$. Da er $\tan^{-1} x = \theta$, hvor θ er vinkelen mellom hypotenus og hosliggende katet. Ved å bruke dette og at $\cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$ får man

$$\cos (\tan^{-1} x) = \cos \theta = \frac{a}{1} = a.$$

Pytagoras og $\frac{o}{a} = x$ gir at

$$o^2 + a^2 = 1 \Rightarrow \frac{o^2}{a^2} + 1 = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Derfor får vi

$$\cos (\tan^{-1} x) = a = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (1 + x^2)^{-1/2}.$$

Man kan også beregne $\cos(\tan^{-1} x)$ på følgende måte. Siden

$$\cos x = \pm\sqrt{\cos^2 x} = \pm\sqrt{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

får vi direkte at $\cos(\tan^{-1} x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, der vi må passe på å velge riktig fortegn.

Integralet $\int \tan^{-1} x \, dx$ kan uttrykkes som

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} x \, dx &= x \tan^{-1} x + \ln |\cos (\tan^{-1} x)| + C = x \tan^{-1} x + \ln (1 + x^2)^{-1/2} + C \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.\end{aligned}$$

49 a)

$$I = \int \sinh^{-1} x \, dx = x \sinh^{-1} x - \int \sinh y \, dy = x \sinh^{-1} x - \cosh (\sinh^{-1} x) + C$$

Vi sjekker svaret ved å derivere I:

$$\frac{dI}{dx} = \sinh^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \sinh (\sinh^{-1} x) = \sinh^{-1} x.$$

b)

$$I = \int \sinh^{-1} x \, dx = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx.$$

Ved å substituere $u = 1 + x^2$, $\frac{du}{dx} = 2x$ får vi at

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} \, du = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Det følger at

$$I = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Vi sjekker svaret ved å derivere I:

$$\frac{dI}{dx} = \sinh^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x.$$

Eksamensoppgaver

$\boxed{23}$ La $v(t)$ betegne plattformens hastighet ved tidspunkt t, der $v(t)$ er målt i km/time og t er målt i timer med $t = 0$ idet slepewiren ryker.

VET: $\quad \dfrac{dv}{dt} = -kv^2, \quad v(0) = 10, \quad v(\frac{1}{12}) = 8$

Vi løser differensiallikningen ved separasjon av variabler.

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v^2} &= -k \int dt \\ -\frac{1}{v} &= -kt + C \\ v(t) &= \frac{1}{kt - C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(0) = -\frac{1}{C} = 10 \quad &\Rightarrow \quad C = -\frac{1}{10} \text{ og } v(t) = \frac{1}{kt + 0.1} \\ v(\tfrac{1}{12}) = \frac{1}{\frac{k}{12} + 0.1} = 8 \quad &\Rightarrow \quad k = \frac{3}{10} \text{ og } v(t) = \frac{1}{0.3t + 0.1} \end{aligned}$$

Vi har derfor at $v(t) = 0.5$ når $\frac{1}{0.3t+0.1} = 0.5$, dvs. når $t = \frac{19}{3}$timer ≈ 6.33timer.

Tilbakelagt strekning:

$$\int_0^{19/3} v(t) dt = \int_0^{19/3} \frac{dt}{0.3t + 0.1} = \frac{10}{3} \Big[\ln(3t+1) \Big]_0^{19/3} = \frac{10}{3} \ln 20 \text{km} \approx 9.99 \text{km}$$