Oppgave 1

b) Vi har at $f(0) = 1 > 0$ og $f(\pi/2) = \pi^2/16 - 1 < 0$. Ved skjæringssetningen (s. 111 i læreboka) finnes det en $x \in (0, \pi/2)$ slik at $f(x) = 0$. Estimering av dette nullpunktet med Newtons metode og startverdi $x_0 = 1$ og gir $x = 0{,}883\,628\,838\,0$ etter fem iterasjoner.
Funksjonen f har flere nullpunkter, og dersom vi bruker startverdien $x_0 = 2$ finner vi et annet nullpunkt med Newtons metode enn det vi fant med $x_0 = 1$. Med en feiltoleranse på $\epsilon = 10^{-10}$ finner vi etter fem iterasjoner at $f(x) = 0$ når $x = 1{,}846\,194\,235\,3$.

c) Den deriverte av funksjonen f er

$$f'(x) = \begin{cases} \left(2\sqrt{x}\right)^{-1}, & x > 0 \\ \left(2\sqrt{-x}\right)^{-1}, & x < 0. \end{cases}$$

For positive $x_n \geq 0$ gir Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sqrt{x_n}}{\left(2\sqrt{x_n}\right)^{-1}} = x_n - 2x_n = -x_n$$

For negative $x_n < 0$ gir Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\sqrt{-x_n}}{\left(2\sqrt{-x_n}\right)^{-1}} = x_n - 2x_n = -x_n$$

Altså er Newtons iterasjonsalgoritme

$$x_{n+1} = -x_n.$$

Med startverdi $x_0 = 1$ får vi at

$$x_{2k} = 1, \quad x_{2k+1} = -1, \quad k \in \mathbb{N}\ ,$$

og x_n vil ikke konvergere mot nullpunktet $x = 0$ uansett hvor mange ganger vi itererer. Dette gjelder uavhengig av valg av startverdi $x_0 \neq 0$.

Oppgave 2

La $f(x) = e^{-x^2}$ og

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

a) Trapesmetoden med fire delintervaller gir

$$T = \frac{1}{8}\left(f(0) + 2f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{2}{4}) + 2f(\frac{3}{4}) + f(1)\right) = 0.7430.$$

Simpsons metode med fire delintervaller gir

$$S_4 = \frac{1}{12}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{2}{4}) + 4f(\frac{3}{4}) + f(1)\right) = 0.74686.$$

Simpsons metode med åtte delintervaller gir

$$S_8 = \frac{1}{24}\left(f(0) + 4f(\frac{1}{8}) + 2f(\frac{2}{8}) + \cdots + 4f(\frac{7}{8}) + f(1)\right) = 0.74683.$$

b) Vi finner at

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

og

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Følgelig er

$$|f''(x)| = |2e^{-x^2}(2x^2 - 1)| \le 2 \cdot |2x^2 - 1| \le 2$$

for alle $x \in [0, 1]$. Vi bruker Teorem 1 på s. 481 i læreboka, og slår fast at $|T - I| < |E_T|$, hvor

$$|E_T| \le \frac{2}{12 \cdot 4^2} = 0.01.$$

To nye derivasjoner av f gir

$$f^{(3)}(x) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}$$

og

$$f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3).$$

Legg merke til at funksjonen $g(x) = 4x^4 - 12x^2 + 3$ er monotont synkende på intervallet $[0, 1]$. Fordi $g(0) = 3$ og $g(1) = -5$ har vi at $|g(x)| \le 5$ for $x \in [0, 1]$. Det følger at

$$|f^{(4)}(x)| = |4e^{-x^2} \cdot g(x)| \le 4 \cdot 5 = 20$$

for $x \in [0, 1]$. Vi bruker igjen Teorem 1 på s. 481 i læreboka, og finner

$$|S_4 - I| < |E_{S_4}| \le \frac{20}{180 \cdot 4^4} = 4.34 \cdot 10^{-4},$$
$$|S_8 - I| < |E_{S_8}| \le \frac{20}{180 \cdot 8^4} = 2.71 \cdot 10^{-5}.$$

Vi vil tilnærme I med trapesmetoden slik at feilen i estimatet ikke overstiger $\frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$. Dette krever at vi bruker n delintervaller hvor n oppfyller

$$\frac{2}{12n^2} < \frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad n > 10^3.$$

Dersom vi heller tilnærmer I med Simpsons metode, fortsatt med feiltoleransen $\frac{1}{6} \cdot 10^{-6}$, rekker det å bruke n delintervaller hvor n oppfyller

$$\frac{20}{180n^4} < \frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad n > 28.$$

d) Her skal studentene kontrollere at programmet de har laget gir samme resultat som håndberegningene.

Avsnitt 7.2

41 La $f(x) = \ln(\sec x)$. Da er $f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x$. f' er kontinuerlig på $(0, \pi/4)$. Ved å bruke formelen på side 411 i boka får vi at lengden til kurven $y = f(x)$ er gitt ved

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (\tan x)^2}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec x\, dx = [\ln|\sec x + \tan x|]_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2} + 1)
\end{aligned}
$$

Avsnitt 7.3

29 Vi bruker først substitusjonen $u = e^t$, $\frac{du}{dt} = e^t$. En får

$$\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\, dt}{\sqrt{e^{2t} + 9}} = \int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u^2 + 9}}.$$

Uttrykket $\sqrt{u^2 + 9}$ er på formen $\sqrt{a^2 + x^2}$, med $a = 3$ og $x = u$. Ved å bruke den trigonometriske substitusjonen $u = 3\tan\theta$, $\frac{du}{d\theta} = 3\sec^2\theta$ får vi at

$$
\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u^2 + 9}} &= \int_{\tan^{-1}\frac{1}{3}}^{\tan^{-1}\frac{4}{3}} \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{(3\tan\theta)^2 + 9}}\, d\theta = \int_{\tan^{-1}\frac{1}{3}}^{\tan^{-1}\frac{4}{3}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\, d\theta = \int_{\tan^{-1}\frac{1}{3}}^{\tan^{-1}\frac{4}{3}} \sec\theta\, d\theta \\
&= [\ln|\sec\theta + \tan\theta|]_{\tan^{-1}\frac{1}{3}}^{\tan^{-1}\frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$

Ved å bruke et referansetriangel som i figur 4 på side 462 med motstående katet u, hosliggende katet 3 og hypotenus $\sqrt{u^2 + 9}$ får vi at $\sec\theta = \frac{\sqrt{u^2+9}}{3}$. Det følger at

$$[\ln|\sec\theta + \tan\theta|]_{\tan^{-1}\frac{1}{3}}^{\tan^{-1}\frac{4}{3}} = \left[\ln\left|\frac{\sqrt{u^2 + 9}}{3} + \frac{u}{3}\right|\right]_1^4 = \ln 3 - \ln\frac{\sqrt{10} + 1}{3} = \ln 9 - \ln(\sqrt{10} + 1).$$

7 Vi skal regne ut $\int \sqrt{25 - t^2}\, dt$. Substituerer med $t = 5\sin\theta$, $\frac{dt}{d\theta} = 5\cos\theta$. Vi får da

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{25 - t^2} dt &= \int \sqrt{25 - 25\sin^2\theta} \cdot 5\cos\theta\, d\theta \\
&= 25 \int \sqrt{\cos^2\theta} \cos\theta\, d\theta \\
&= 25 \int \cos^2\theta\, d\theta
\end{aligned}
$$

Bruker $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ og får

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{25-t^2}\,dt &= \frac{25}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{25}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C \\
&= \frac{25}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C \\
&= \frac{25}{2}\left(\sin^{-1}\frac{t}{5} + \frac{t}{25}\sqrt{25-t^2}\right) + C \\
&= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{t}{5} + \frac{t}{2}\sqrt{25-t^2} + C
\end{aligned}$$

På nest siste linje bruker vi $\sin\theta\cos\theta = \sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{t}{5}\sqrt{1-t^2/25}$ og substituerer tilbake med $\theta = \sin^{-1}(t/5)$.

Avsnitt 7.4

$\boxed{12}$ Vi bruker delbrøksoppspaltning.

$$\frac{2x+1}{x^2-7x+12} = \frac{2x+1}{(x-4)(x-3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3}$$

Vi setter det siste uttrykket på fellesnevner og får følgende likhet fra tellerene

$$A(x-3) + B(x-4) = 2x+1$$

som medfører $A = 9$, og dermed $B = -7$. Vi løser så integralet

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx &= \int \left(\frac{9}{x-4} - \frac{7}{x-3}\right) dx \\
&= 9\ln|x-4| - 7\ln|x-3| + C \\
&= \ln\left|\frac{(x-4)^9}{(x-3)^7}\right| + C.
\end{aligned}$$

$\boxed{49}$ a) Vi må løse differensialligningen

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x),\ k = 1/250,\ N = 1000,\ x(0) = 2.$$

Dette er en separabel differensialligning. Ved å samle x- og t-leddene på hver sin side av likhetstegnet og deretter integrere får en

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{x(N-x)} = k\,dt \\
&\qquad\Downarrow \\
&kt = \int \frac{dx}{x(N-x)} = \int \frac{1}{Nx} + \frac{1}{N(N-x)}\,dx = \frac{\ln x}{N} - \frac{\ln(N-x)}{N} + C.
\end{aligned}$$

Her har jeg brukt delbrøksoppspaltningen $\frac{1}{x(N-x)} = \frac{1}{Nx} + \frac{1}{N(N-x)}$. Ved å sette inn for N og k og bruke betingelsen $x(0) = 2$ får en at $-C = \frac{1}{N}\ln\frac{1}{499}$. Så

$$4t + \ln\frac{1}{499} = \ln\frac{x}{1000-x}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x}{1000-x} = \frac{e^{4t}}{499}$$
$$\Downarrow$$
$$x = \frac{1000e^{4t}}{499+e^{4t}}.$$

b) Vi må løse likningen $\frac{1000}{2} = \frac{1000e^{4t}}{499+e^{4t}}$:

$$\frac{1000}{2} = \frac{1000e^{4t}}{499+e^{4t}} \iff 499 = e^{4t} \iff t = \frac{\ln 499}{4} \approx 1,55.$$

Avsnitt 7.5

$\boxed{6}$ Bruker formel #7 med $a = 7, b = 5, n = 3/2$. Får da

$$\int x(7x+5)^{3/2}\,dx = \frac{(7x+5)^{5/2}}{7^2}\left(\frac{7x+5}{7/2} - \frac{5}{5/2}\right) + C = \frac{2}{343}(7x+5)^{5/2}(7x-2) + C$$