Løsningsforslag - Øving 9

Avsnitt 7.2

44 Vi bruker formelen $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ med $\theta = 2x$. Arealet mellom x-aksen og kurven $y = \sqrt{1+\cos 4x}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1+2\cos^2 2x - 1}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 2x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\cos 2x|\,dx \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,dx + \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} |\cos 2x|\,dx + \sqrt{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/4} |\cos 2x|\,dx + \sqrt{2}\int_{3\pi/4}^{\pi} |\cos 2x|\,dx \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx + \sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} -\cos 2x\,dx + \sqrt{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/4} -\cos 2x\,dx + \sqrt{2}\int_{3\pi/4}^{\pi} \cos 2x\,dx \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} - \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi/2}^{3\pi/4} + \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{3\pi/4}^{\pi} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-(-1)-(-1)+1) = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Avsnitt 7.3

38 Vi skal løse initialverdiproblemet. Vi gjør substitusjonen $x = 3/\cos t, dx = 3\sin t/\cos^2 t\,dt$. Vi får:

$$\begin{aligned}
y &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} \\
&= \int \frac{3\sin t\,dt}{\cos^2 t\sqrt{9\tan^2 t}} \\
&= \int \frac{1}{\cos t}\,dt \\
&= \ln(\frac{1}{\cos t} + \tan t) + C' \\
&= \ln(\frac{3}{\cos t} + 3\tan t) - \ln(3) + C' \\
&= \ln(x + \frac{3\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}) + C \\
&= \ln(x + \sqrt{x^2-9}) + C
\end{aligned}$$

Beregner konstantleddet ved å sette $y(5) = \ln 3$.

$$\ln 3 = y(5) = \ln(5 + \sqrt{5^2-9}) + C = \ln 9 + C$$

som gir

$$C = \ln 3 - \ln 9 = \ln 3 - 2\ln 3 = -\ln 3$$

og svaret blir dermed

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2-9}) - \ln 3, x > 3$$

Avsnitt 7.5

60 Definisjonsområdet til integranden $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ er $0 \leq x \leq 2$ siden $2x - x^2 < 0$ ellers. Vi ser umiddelbart at $f(x) \geq 0$ på hele definisjonsområdet. Den største verdien til integralet oppnås derfor ved å integrere over hele definisjonsområdet, altså $a = 0$ og $b = 2$, som gir integralet

$$\int_0^2 x\sqrt{2x - x^2}\, dx.$$

For å regne ut dette integralet bruker vi formel #51 på side T-3 i læreboka med $a = 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2x - x^2}\, dx &= \left[\frac{(x+1)(2x-3)\sqrt{2x - x^2}}{6} + \frac{1}{2}\arcsin(x-1)\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Avsnitt 7.7

6

$$\begin{aligned}\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}} &= \int_{-8}^0 \frac{dx}{x^{1/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \\ &= \lim_{c \to 0^-} \int_{-8}^c \frac{dx}{x^{1/3}} + \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \\ &= \lim_{c \to 0^-} [\frac{3}{2}x^{2/3}]_{-8}^c + \lim_{c \to 0^+} [\frac{3}{2}x^{2/3}]_c^1 \\ &= \lim_{c \to 0^-} (\frac{3}{2}c^{2/3}) - \frac{3}{2}(-8)^{2/3} + \frac{3}{2} \cdot 1 - \lim_{c \to 0^+} (\frac{3}{2}c^{2/3}) \\ &= 0 - \frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{3}{2} - 0 \\ &= -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

24 Vi løser først det ubestemte integralet. Substitusjonen $u = -x^2$ gir $du = -2xdx$ og

$$\int 2xe^{-x^2}\, dx = -\int -2xe^{-x^2}\, dx = -\int e^u\, du = -e^u + C = -e^{-x^2} + C.$$

Vi løser så det uekte integralet:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx &= \int_{-\infty}^0 2xe^{-x^2}\, dx + \int_0^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx \\ &= \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 2xe^{-x^2}\, dx + \lim_{c \to \infty} \int_0^c 2xe^{-x^2}\, dx \\ &= \lim_{b \to -\infty} \left[-e^{-x^2}\right]_b^0 + \lim_{c \to \infty} \left[-e^{-x^2}\right]_0^c \\ &= \lim_{b \to -\infty} (-1 - (-e^{-b^2})) + \lim_{c \to \infty} (-e^{-c^2} - (-1)) = (-1 - 0) + (0 + 1) = 0.\end{aligned}$$

66 Vi skal vise at $\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ divergerer. Fra definisjonen på side 487 får en

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1} &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln(b^2+1) = \infty.\end{aligned}$$

Ved definisjonen på side 487 har vi at

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^0 \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}.$$

Integralet divergerer siden en av summandene, $\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$, divergerer.

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_{-b}^b = \lim_{b\to\infty} 0 = 0.$$

Dette viser at $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,dx}{x^2+1}$ ikke er lik $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^b \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

74 a) Volumet av Gabriel sitt horn er

$$\begin{aligned}V &= \int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b \\ &= \pi(1-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}) = \pi.\end{aligned}$$

b) Det er sunn fornuft at en trenger uendelig mye maling for å dekke en uendelig stor flate. Men a) viser at i matematikken er det ikke nødvendigvis slik: Når tykkelsen av malinga går raskt nok mot 0, vil volumet bli endelig selv om flata er uendelig stor. Vi kan f.eks. male hele xy-planet med π enheter maling dersom vi passer på å male med tykkelse $1/(1+r^2)^2$ der r er avstanden fra origo.

Avsnitt 8.1

24

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 1+0 = 1$$

32 For at følgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ skal konvergere må alle underfølgene konvergere mot samme grenseverdi. En har at

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}(-1)^{2k}(1-\frac{1}{2k}) = \lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{2k}) = 1$$

og

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty}(-1)^{2k-1}(1-\frac{1}{2k-1}) = \lim_{k\to\infty}(-1)(1-\frac{1}{2k-1}) = -1.$$

Dette betyr at følgen $a_1, a_3, a_5, \ldots$ konvergerer mot -1, mens følgen $a_2, a_4, a_6, \ldots$ konvergerer mot 1: $\{a_n\}$ divergerer.

50 Theorem 5, punkt 5, gir at $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$, vi får derfor:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{-1}{n})^n = e^{-1}$$

73 Vi har følgen $a_n = \frac{n^2}{2n-1}\sin\frac{1}{n}$. Vi skal sjekke om denne konvergerer, og hva den isåfall konvergerer mot. Vi bruker Theorem 4, og ser på funskjonen $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}\sin\frac{1}{x}$ og undersøker hva som skjer når $x\to\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}}{2-\frac{2}{x}}\\ &= \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Her bruker vi l'Hopitals regel. Vi har derfor fra Theorem 4 at a_n konvergerer mot $\frac{1}{2}$.

81 Vi har at

$$\begin{aligned}a_n &= n-\sqrt{n^2-n} = \frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{n^2-(n^2-n)}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}\\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1-1/n}}.\end{aligned}$$

La $b_n = \frac{1}{n}$ og $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}$. f er kontinuerlig i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ og definert for alle b_n.

Fra Theorem 3 på side 507 følger det at

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-1/n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\lim_{n\to\infty}1/n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}.$$

Avsnitt 8.2

12

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) &= (\frac{5}{2^0}-\frac{1}{3^0})+(\frac{5}{2^1}-\frac{1}{3^1})+(\frac{5}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\dots\\ &= 5\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots)-(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots)\\ &= 5\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ &= 5\cdot\frac{1}{1-1/2}-\frac{1}{1-1/3} = 10-\frac{3}{2} = \frac{17}{2}\end{aligned}$$

Vi bruker at rekken er differansen av to geometriske rekker.

18 Vi bruker delbrøksoppspaltning:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2}$$

og får at $A = C = 0$, $B = 1$ og $D = -1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= (1 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{9}) + (\frac{1}{9} - \frac{1}{16}) + \dots \\ &= 1 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{9} - \frac{1}{9}) - \dots \\ &= 1 - 0 - 0 - \dots = 1.\end{aligned}$$

35

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$$

Se på følgen $a_n = \frac{n!}{1000^n}$. Fra punkt 6 i Theorem 5 i kapittel 8.1 med $x = 1000$ har vi at $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Vi kan alternativt se direkte fra følgen at $a_n = \frac{n}{1000} a_{n-1}$, og dermed vil $a_n > a_{n-1}$ for $n > 1000$. Vi ser at a_n ikke går mot 0 og rekken divergerer fra n'te-leddstesten.

Eksamensoppgaver

49 Vi vil beregne det bestemte integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x + e^{-x}} \, dx.$$

Vi substituerer med $u = e^x$. Da er $du = e^x \, dx = u \, dx$, slik at

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x + e^{-x}} \, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{u(1 + u + u^{-1})} \, du = \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + u + u^2} \, du.$$

For å løse dette integralet kan vi bruke formel 6b på side 133 i Rottmann, med $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ og $c = 1$. Vi kan også beregne dette selv ved å komplettere kvadratet,

$$u^2 + u + 1 = (u + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Dette gir da

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{1 + u + u^2} \, du = \int_1^{\infty} \frac{1}{\frac{3}{4} + (u + \frac{1}{2})^2} \, du &= \frac{4}{3} \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + (\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}})^2} \, du \\ &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{1 + v^2} \, dv = \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan v]_{\sqrt{3}}^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}},\end{aligned}$$

hvor vi underveis foretar substitusjonen $v = \frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}$.