Løsningsforslag - Øving 1

Avsnitt 1.5

59 a) Vi skal invertere $y = f(x) = \frac{100}{1+2^{-x}}$, dvs. løse ligningen mhp. x.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{100}{1+2^{-x}} \\
y(1+2^{-x}) &= 100 \\
2^{-x} &= \frac{100}{y} - 1 = \frac{100-y}{y} \\
-x \ln 2 &= \ln \frac{100-y}{y} \\
x &= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{y}{100-y}
\end{aligned}
$$

Vi bytter om på x og y:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{x}{100-x}$$

Vi sjekker svaret:

$$
\begin{aligned}
(f \circ f^{-1})(x) &= \frac{100}{1 + 2^{-\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{x}{100-x}}} \\
&= \frac{100}{1 + e^{-\ln 2 \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{x}{100-x}}} \\
&= \frac{100}{1 + e^{-\ln \frac{x}{100-x}}} \\
&= \frac{100}{1 + \frac{100-x}{x}} = \frac{100x}{x + 100 - x} = x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(x) &= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\frac{100}{1+2^{-x}}}{100 - \frac{100}{1+2^{-x}}} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{100}{100(1+2^{-x}) - 100} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1}{2^{-x}} = \frac{1}{\ln 2} x \ln 2 = x
\end{aligned}
$$

b) Nøyaktig samme utregning som i a) gir

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 1.1} \ln \frac{x}{50-x}$$

Avsnitt 2.1

3 a) Gjennomsnittlig variasjon til funksjonen $h(t) = \cot t$ over $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ er

$$\frac{\cot \frac{3\pi}{4} - \cot \frac{\pi}{4}}{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-1-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$$

b) Gjennomsnittlig variasjon til funksjonen $h(t) = \cot t$ over $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ er

$$\frac{\cot \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} = \frac{0 - \frac{3}{\sqrt{3}}}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

Avsnitt 2.3

20 Med $\epsilon = 1$ krever vi at

$$|\sqrt{x-7} - 4| < 1$$

Vi deler absoluttverdien i to deler og får

$$\sqrt{x-7} - 4 < 1$$

og

$$\sqrt{x-7} - 4 > -1.$$

Løser vi disse to ulikhetene får vi

$$x < 32$$

og

$$x > 16.$$

Begge disse må gjelde, dvs. for $x \in (16, 32)$ holder $|f(x) - L| < \epsilon$. Med $x_0 = 23$ ser vi at ulikheten holder for $|x_0 - x| < \delta$ med $\delta = 7$.

53 La $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $L = -1$. Da vil $f(x)$ komme tettere på L når x nærmer seg 0, men L er ikke grensen til $f(x)$ for x gående mot x_0 (grensen er $L = 0$).

For å vise at $L = -1$ ikke er grensen til $f(x)$ når x går mot x_0, negerer vi $\epsilon-\delta$- definisjonen: L er ikke grensen til $f(x)$ når x nærmer seg x_0 hvis det finnes en ϵ slik at for alle δ,

$$|x - x_0| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Gitt δ, skal vi altså finne en ϵ (og en x) slik at $|x - 0| = |x| < \delta$ og $|x^2 - (-1)| = |x^2 + 1| = x^2 + 1 > \epsilon$. Vi ser at $x^2 + 1 \geq 1 > \frac{1}{2}$ for alle x siden $x^2 \geq 0$ for alle x. La $\epsilon = \frac{1}{2}$.

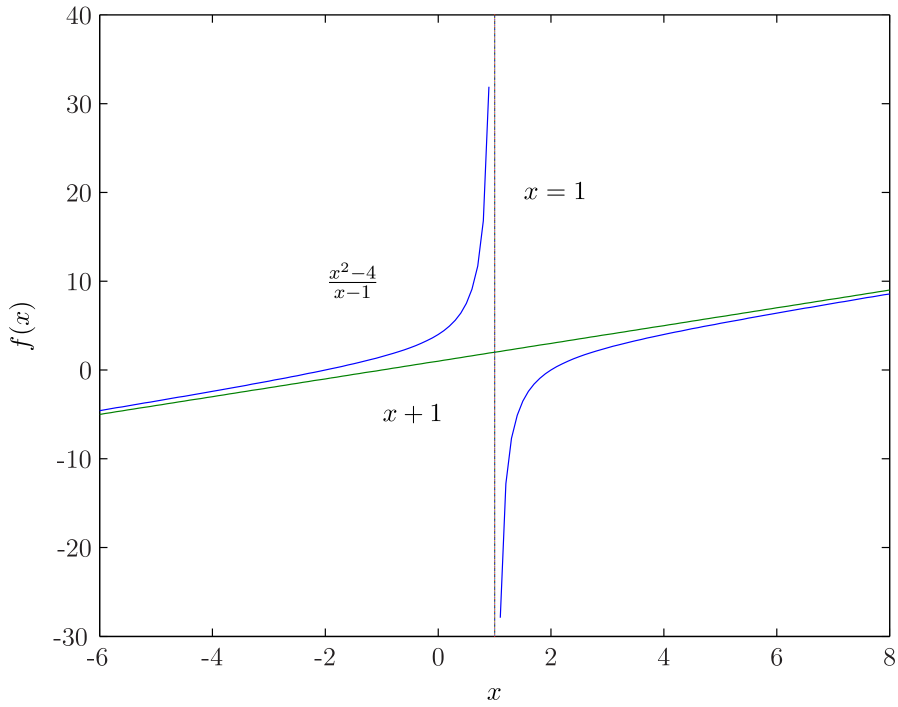
Avsnitt 2.5

35 Gjør vi polynomdivisjon får vi at

$$\frac{x^2-4}{x-1} = x+1-\frac{3}{x-1}.$$

Først ser vi på hvordan $f(x)$ oppfører seg når $x \to 1$. Siden $\lim_{x\to 1^-} = +\infty$ og $\lim_{x\to 1^+} = -\infty$, har grafen en vertikal asymptote ved $x = 1$.

Når $x \to \pm\infty$, går resten $\frac{3}{x-1}$ mot 0, dvs. at for store $|x|$ vil $f(x)$ oppføre seg som $x+1$ (skrå asymptote).



Figur 1: Oppgave 2.5.35

Avsnitt 2.6

39 For at f skal være kontinuerlig må vi ha

(1) $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

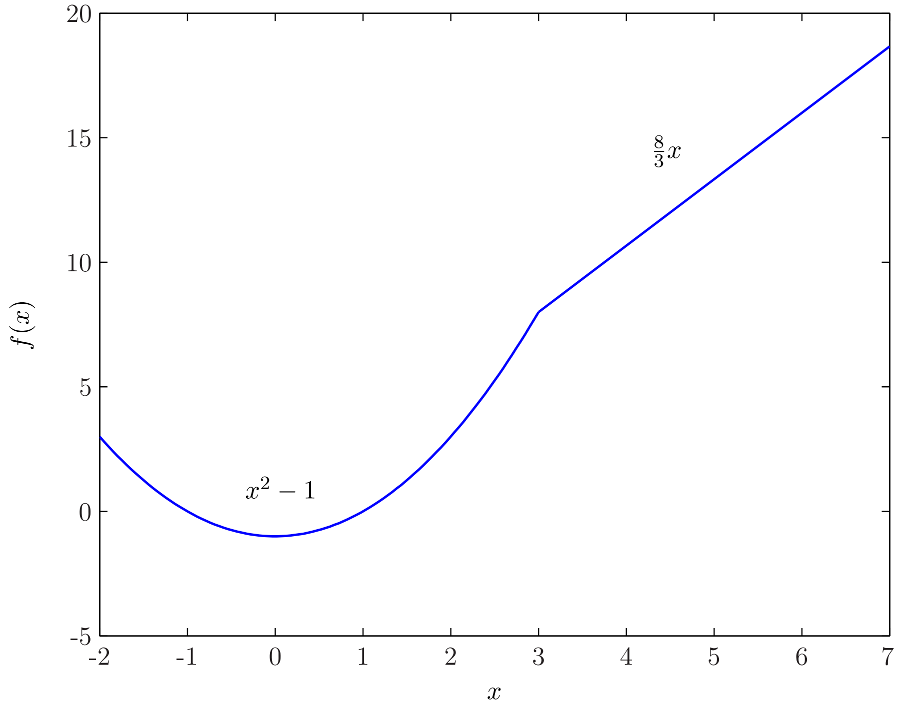
Beregn først hver side for seg

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3^2 - 1 = 8$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2a \cdot 3 = 6a$$

Sett inn i (1) og beregn a

$$8 = 6a$$
$$a = \frac{4}{3}$$

Ved kontinuitetstesten (på side 105 i boka) er f kontinuerlig for $a = \frac{4}{3}$.



Figur 2: Oppgave 2.6.39

46 Siden funksjonen er kontinuerlig kan vi bruke skjæringssetningen (intermediate value theorem). Det holder da å vise at $f(x) = \cos(x) - x$ har minst en positiv verdi og minst en negativ verdi. Vi ser for eksempel at

$$f(0) = 1 > 0 \quad \text{og} \quad f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

Ligningen har dermed minst en løsning.

Avsnitt 2.7

34 Nei, grafen til g har ingen tangent i origo fordi

$$\frac{g(h) - g(0)}{h - 0} = \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

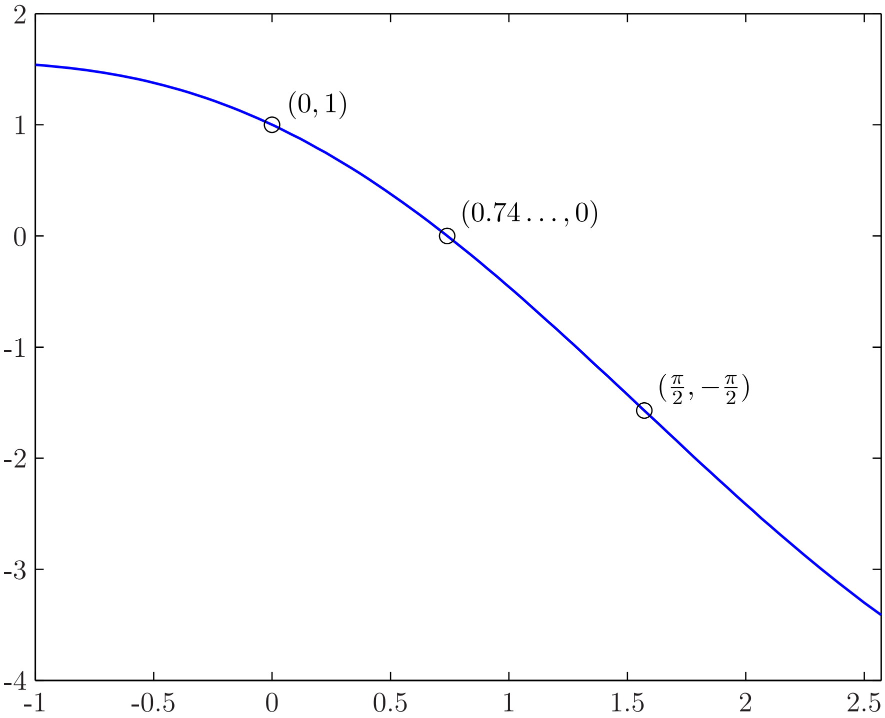
ikke har en grense når h nærmer seg 0 (jf. 2.59f side 106 i boka).

Avsnitt 3.2

53 Fra oppgaven følger det at kurven går gjennom punktene $(1, 2)$ og $(0, 0)$ og har stigningstall 1 for $x = 0$. Mao.:

$$\begin{aligned}
2 &= y(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c \\
0 &= y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\
1 &= y'(0) = 2a \cdot 0 + b = b
\end{aligned}$$

Ved å løse dette ligningssystemet får man at $a = 1$, $b = 1$ og $c = 0$.



Figur 3: Oppgave 2.6.46.

Avsnitt 3.3

13 a)

$$\begin{aligned} s(t) &= 179 - 16t^2 \\ v(t) = s'(t) &= -32t \\ a(t) = s''(t) &= -32 \end{aligned}$$

b) Når ballens høyde er $s = 0$ treffer ballen bakken

$$\begin{aligned} 0 &= 179 - 16t^2 \\ t &= \sqrt{\frac{179}{16}}\text{s} = \frac{1}{4}\sqrt{179}\text{s} \approx 3.3\text{s} \end{aligned}$$

c) Setter inn tiden vi fant i b inn i ligningen for farten i a

$$v(\frac{1}{4}\sqrt{179}) = -8\sqrt{179}\text{ft/s} \approx -32.6\text{m/s}$$

Avsnitt 3.4

25 a) Vi skal regne ut den andrederiverte av $y = \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. La oss begynne med den første:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2(x)}\cos(x) = -\frac{1}{\sin(x)}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sin(x)}\cot(x) = -\csc(x)\cot(x)$$

Nå regner vi ut den andrederiverte:

$$\begin{aligned}
y'' &= -(\csc(x))'\cot(x) - \csc(x)(\cot(x))' \\
&= -(-\csc(x)\cot(x))\cot(x) - \csc(x)(-\csc^2(x)) \\
&= \frac{1}{\sin(x)}\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)}\frac{1}{\sin^2(x)} \\
&= \frac{1}{\sin(x)}\frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)}\frac{1}{\sin^2(x)} \\
&= 2\csc^3(x) - \csc(x)
\end{aligned}$$

b) Vi skal regne ut den andrederiverte av $y = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. La oss begynne med den første:

$$y' = \sec(x)\tan(x)$$

Nå regner vi ut den andrederiverte:

$$\begin{aligned}
y'' &= (\sec(x))'\tan(x) + \sec(x)(\tan(x))' \\
&= \sec(x)\tan^2(x) + \sec(x)\sec^2(x) \\
&= \frac{1}{\cos(x)}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^3(x)} \\
&= \frac{1}{\cos(x)}\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^3(x)} \\
&= 2\sec^3(x) - \sec(x)
\end{aligned}$$

Avsnitt 3.5

97 La

$$x - 1 = t, \qquad t \in [0, \infty).$$

Av dette følger

$$y^2 = t \Rightarrow y = \pm\sqrt{t} \qquad t \in [0, \infty).$$

Siden vi skal parameterisere nedre halvdel av parabolen får vi at parametriseringen av kurven er gitt ved;

$$x = 1 + t, \quad y = -\sqrt{t} \quad \text{for } t \in [0, \infty).$$

Avsnitt 3.6

2 Vi bruker implisitt derivasjon til å finne dy/dx for $x^3 + y^3 = 18xy$,

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= 18xy, \\
\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) &= \frac{d}{dx}18xy, \\
3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 18y + 18x\frac{dy}{dx}, \\
(3y^2 - 18x)\frac{dy}{dx} &= 18y - 3x^2, \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{18y - 3x^2}{3y^2 - 18x}.
\end{aligned}$$

32 Vi viser først at punktet $(-2, 1)$ er på kurven $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$,

$$y^2 - 2x - 4y - 1 = 1^2 - 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 1 - 1 = 0.$$

Vi skal finne tangenten til kurven i punktet gitt over. Vi finner stigningstallet til en tangent til kurven ved å bruke implisitt derivasjon,

$$\begin{aligned} y^2 - 2x - 4y - 1 &= 0, \\ \frac{d}{dx}(y^2 - 2x - 4y - 1) &= 0, \\ 2y\frac{dy}{dx} - 2 - 4\frac{dy}{dx} &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{2y-4}. \end{aligned}$$

I punktet vårt er stigningstallet

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-2,1)} = \frac{2}{2-4} = -1,$$

og ligningen for tangenten i punktet vårt blir da

$$\begin{aligned} y - 1 &= -1(x - (-2)), \\ y &= -x - 1. \end{aligned}$$

Vi skal finne normalen til kurven i punktet gitt over. Siden stigningstallet til tangenten er $a = -1$ og normalen står vinkelrett på tangenten, er stigningstallet til normalen lik $-1/a = 1$. Ligningen for normalen blir da

$$\begin{aligned} y - 1 &= 1(x - (-2)), \\ y &= x + 3. \end{aligned}$$

Avsnitt 3.7

9 Vi antar at $y = f(x)$ har en invers, dvs. at f^{-1} eksisterer. Videre har vi fra oppgaveteksten at $f(2) = 4$ og $f'(2) = 1/3$. Vi skal finne

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=4}$$

Merk at $f^{-1}(4) = f^{-1}(f(2)) = 2$. Ved å bruke Teorem 3.7.4, Derivasjonsregel for inverse, får vi

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=4} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f^{-1}(4)=2}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Avsnitt 3.8

13 Bare se på grafen på side 194 i boken. Funksjonen er kontinuerlig i $[-1, 1]$, så grensen er funksjonsverdien i punktet $x = 1$, $\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$.