Avsnitt 8.3

14 Fra integraltesten følger det at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ divergerer, da vi vet at integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{u} du$$

er divergent.

18 Vi husker fra delkapittel 8.2 at en rekke $\sum_n a_n$ divergerer dersom $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Fra Teorem 5 i delkapittel 8.1 har vi at

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e.$$

Altså divergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

32 Vi ser på rekken

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1}\right) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1-2a(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(1-2a)n+1+2a}{(n+1)(n-1)}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \left((1-2a)\frac{n}{(n+1)(n-1)} + (1+2a)\frac{1}{(n+1)(n-1)}\right).$$

For å sjekke om denne konvergerer ser vi på rekken $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ med

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n-1)}$$

For $n \geq 3$ har vi

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n-1)} < \frac{1}{(n-1)^2}$$

og det følger fra sammenligningstesten at $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ konvergerer. Følgelig konvergerer også

$$\sum_{n=3}^{\infty} (1+2a)\frac{1}{(n+1)(n-1)}.$$

Fra punkt 2 nederst på 520 i læreboka følger det at rekken vår konvergerer eller divergerer hvis

$$\sum_{n=3}^{\infty} (1-2a)\frac{n}{(n+1)(n-1)}$$

henholdsvis konvergerer eller divergerer. Vi ser derfor på rekken $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ med

$$b_n = \frac{n}{(n+1)(n-1)}$$

For $n \geq 3$ har vi

$$b_n = \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \frac{n}{(n^2-1)} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

og det følger fra sammenligningstesten med den harmoniske rekken at $\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ divergerer. Fra punkt 1 nederst på 520 i læreboka har vi at også

$$\sum_{n=3}^{\infty}(1-2a)\frac{n}{(n+1)(n-1)}.$$

divergerer når $(1-2a) \neq 0$. Det eneste valget som gir konvergens er dermed $a = 1/2$ slik at:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(1-2a)\frac{n}{(n+1)(n-1)} = \sum_{n=3}^{\infty} 0 \cdot \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \sum_{n=3}^{\infty} 0 = 0.$$

44 Vi ser på rekka $\sum \frac{1}{n^4}$.

a) Fra (2) med $n = 10$ og $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $\int_n^{\infty} f(x)\,dx = \int_n^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3n^3}$, følger det at

$$1,08229 \approx s_{10} + \frac{1}{3 \cdot 11^3} \leq S \leq s_{10} + \frac{1}{3 \cdot 10^3} \approx 1,08237.$$

b) Summen S kan tilnærmes med intervallets midtpunkt: $\sum \frac{1}{n^4} \approx 1,08233$. Feilen i denne tilnærmingen er mindre enn halvparten av intervallets lengde, så feilen er mindre enn 0,00004.

Avsnitt 8.4

6 La $a_n = \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$ og la $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Observer at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ved grensesammenligningstesten er enten både $\sum a_n$ og $\sum b_n$ konvergente eller så er de begge divergente. Av integraltesten følger det at $\sum_1^{\infty} b_n$ er konvergent siden

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \infty.$$

Den siste ulikheten følger av Example 3, side 489/490 i læreboka.

25 Vi ser på grensa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Fra grensesammenligningstesten følger det at $\sum_n \sin(1/n)$ og $\sum_n 1/n$ enten begge konvergerer eller begge divergerer. Vi vet at sistnevnte rekke divergerer. Altså divergerer også rekka $\sum_n \sin(1/n)$.

35 La $a_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{2}{n(n+1)}$ og $b_n = \frac{2}{n^2}$. Siden $a_n < b_n$ for alle $n \geq 1$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer ved Example 3, side 525 i læreboka, følger det av sammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.

36 La $a_n = \frac{1}{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}$ og $b_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$. Siden $a_n \leq b_n$ for alle $n \geq 1$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer ved oppgave 8.4.35, følger det av sammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.

Avsnitt 8.5

3 La $a_n = n!e^{-n} = \frac{n!}{e^n}$. Observer at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n!}{e^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!e^n}{n!e^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{e} = \infty$$

Ved forholdstesten følger det at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer.

14 Rottesten med $a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^n$ gir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

Siden $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ har vi at rekken konvergerer.

26 Rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 \cdot 2^n}$$

er divergent. Dette følger fra forholdstesten, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \frac{3}{2} > 1.$$

44 Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)](3^n+1)}$$

er konvergent. Vi ser på forholdet

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(3^n+1)}{(3^{n+1}+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{(3^n+1)}{(3^{n+1}+1)} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)}. \end{aligned}$$

Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3^n+1)}{(3^{n+1}+1)} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^{-n}}{3+3^{-n}} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

og dermed konvergerer rekken ved forholdstesten.

Avsnitt 8.6

22 For at rekken $\sum_n a_n$ skal være absolutt konvergent må $\sum_n |a_n|$ konvergere. Vi bruker forholdstesten

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{(n+5^n)}{(n+1+5^{n+1})}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+5^n)}{n+1+5^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+(2\ln 5)5^n}{1+(\ln 5)5^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(\ln 5)^2 5^n}{(\ln 5)^2 5^{n+1}} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Siden $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ har vi at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt. Da følger det at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ også konvergerer.

24 Vi ser at $\lim_{n\to\infty} a_n$ ikke eksisterer ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} -\sqrt[n]{10}$), så rekken divergerer ved n'te-leddstesten.

55 Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer, vil $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere ved Theorem 16, side 540 i læreboka. Det følger at dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, vil også $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergere.

58 Vi ønsker at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ skal divergere, så vi velger to alternerende rekker $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} v_n$ der $u_n, v_n > 0$. Leibniz' teorem sier nå at det er nok å velge u_n og v_n som avtar monotont mot 0, men teoremet sier ingenting om hvor raskt de må avta. Vi kan derfor velge rekker som avtar så langsomt mot 0 at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ divergerer.

For eksempel kan vi velge $u_n = v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, som gir den divergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. (Om man ønsker u_n forskjellig fra v_n kan man f.eks. velge $u_n = n^{-1/3}$, $v_n = n^{-2/3}$.)

Eksamensoppgaver

60 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er en følge slik at $a_n > 0$ for alle n og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.
Siden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer må $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Spesielt må det da finnes et heltall N slik at $a_n < 1$ for $n > N$. Se på rekken

$$A = \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2$$

Dersom denne rekken konvergerer må også rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergere, siden det ikke gjør noe for konvergensen av en rekke å fjerne et endelig antall ledd. Nå vil $a_n^2 < a_n$ for $n > N$. Dermed vil rekken A være dominert av en positiv rekke som konverger og vil ved sammenligningstesten selv konvergere. Altså konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ også.

For rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ har vi for alle leddene at

$$\ln(1 + a_n) < a_n$$

Dette kan vises ved at $f(x) = x$ og $g(x) = \ln(1 + x)$ er like i null og $f'(x) > g'(x)$ for alle $x > 0$. Dermed vil denne rekken også være dominert av en positiv rekke som konverger og vil ved sammenligningstesten selv konvergere.

Alternativt: Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n'}{1+a_n}}{a_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + a_n} = 1 > 0.$$

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, vil også $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$ konvergere ved grensesammenligningstesten.