Avsnitt 8.9

20 Vi kan selvsagt beregne feilen ved å bruke Taylors formel og Teorem 23 i læreboka s. 561. Her er det derimot enklere å benytte seg av den umiddelbare observasjonen at Maclaurin-rekken for $\cos x$:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

er en alternerende rekke for $x \neq 0$. For $|x| < 0.5$ er det også klart at leddene i rekken minker i absoluttverdi og går mot 0. Dermed kan vi bruke Teorem 15 s. 539 i læreboka.

Fra teoremet følger det at $1 - \frac{x^2}{2}$ approksimerer den fulle rekken for $\cos x$ med en feil som i absoluttverdi er mindre enn absoluttverdien til det første leddet som er utelatt, $\frac{x^4}{4!}$. Ved å bruke $|x| < 0.5$ får vi feilestimatet $\frac{0.5^4}{4!} = \frac{1}{384} \approx 2.61 \times 10^{-3}$. Vi har rundet opp på slutten for å være sikker på at ulikheten ennå holder.

Fortegnet på feilen er det samme som fortegnet til det første leddet som er utelatt ifølge teoremet. Siden $\frac{x^4}{4!}$ har positivt fortegn i rekken vil feilen også være positiv og $1 - \frac{x^2}{2}$ vil gi et for lavt estimat for $\cos x$ for $x \neq 0$.

22 Ved Taylors formel (med $a = 0$) har vi at

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + R_1(x),$$

der $R_1(x) = \frac{f^{(2)}(c)}{2!}x^2 = \frac{-\frac{1}{4}(1+c)^{-3/2}}{2}x^2$ for en c mellom 0 og x.

Vi ser ut fra funksjonsuttrykkene at

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} < 0,$$

og

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} > 0,$$

for $x > -1$.

Det følger at $f^{(2)}(x)$ er en negativ og stigende funksjon. Vi har dermed at

$$|f^{(2)}(t)| = |-\frac{1}{4}(1+t)^{-3/2}| < |-\frac{1}{4}(1-0.01)^{-3/2}| = \frac{1}{4}0.99^{-3/2},$$

for alle t mellom 0 og x, inkludert endepunktene, for $|x| < 0.01$.

Ved å sette inn denne øvre grensen for konstanten M i Teorem 23 med $a = 0$ og $n = 1$ følger det at

$$|R_1(x)| \leq M\frac{|x|^2}{2!} = \frac{1}{4}0.99^{-3/2}\frac{|x|^2}{2} < \frac{1}{4}0.99^{-3/2}\frac{0.01^2}{2} \approx 1.27 \times 10^{-5},$$

er en øvre grense for feilen til approksimasjonen når $|x| < 0.01$. Merk at vi runder opp på slutten for å være trygg på at ulikheten holder.

Avsnitt 8.10

8 Vi bruker formelen for binomiske rekker.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} (x^2)^k = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \dots$$

18 Formelen for binomiske rekker gir oss for $x^2 < 1$

$$\left((1-x^2)^{-1}\right)^2 = (1-x^2)^{-2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-2}{k} (-x^2)^k = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + 5x^8 + \dots$$

Vi multipliserer denne med $2x$.

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} = 2x + 4x^3 + 6x^5 + 8x^7 + 10x^9 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)x^{2k+1}$$

Alternativt kan man se at $\left((1-x^2)^{-1}\right)' = (1-x^2)^{-2}$. Vi kan dermed komme fram til det samme svaret ved å derivere rekkeutviklingen til $(1-x^2)^{-1}$.

Avsnitt 15.1

1 *d*. Vi ser at $y' = 0$ når $y = -x$, det tilsvarer de horisontale pilene i figur *d*.

2 *c*. Siden y' ikke avhenger av x, er figur c den eneste muligheten. Vi ser også at $y' = 0$ når $y = -1$.

3 *a*. $y' = 0$ når $x = 0$ (horisontale piler) og y' går mot $\pm\infty$ (vertikale piler) når y går mot 0 og $x \neq 0$.

4 *b*. $y' = 0$ (horisontale piler) når $y^2 = x^2$, det vil si når $y = x$ og $y = -x$.

12 Picards iterasjonsmetode er gitt som

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t$$

Med $f(x, y) = y$ og $y_0 = y(0) = 1$ får vi

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = 1 + x \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)\,\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2)\,\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3
\end{aligned}$$

Avsnitt 15.2

19 Vi løser ligningen ved hjelp av integrerende faktor. Merk at ligningen ikke er oppgitt på standardform. Siden $x > -1$, kan vi dele begge sidene av ligningen på $x + 1$:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}$$

Ligningen er nå på standardform med $P(x) = -2x$ og $Q(x) = \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}$. Vi finner integrerende faktor.

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = e^{\int(-2x)\,\mathrm{d}x} = e^{-x^2}$$

Multipliser begge sider av ligningen med $v(x)$ og integrer.

$$\begin{aligned}
e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y &= \frac{1}{(1+x)^2} \\
(ye^{-x^2})' &= \frac{1}{(1+x)^2} \\
ye^{-x^2} &= \int \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+1} + C \\
y(x) &= e^{x^2}(-\frac{1}{x+1} + C)
\end{aligned}$$

Bruker initialbetingelsen og finner $C = 6$.

$$y(x) = e^{x^2}(6 - \frac{1}{x+1})$$

22

a) Ligningen er allerede på standardform med $P(t) = \frac{k}{m}$ og $Q(t) = 0$. Vi finner integrerende faktor.

$$v(x) = \mathrm{e}^{\int P\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}$$

Multipliser og integrer.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}u' + \mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}\frac{ku}{m} &= 0 \\
(\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}u)' &= 0 \\
\mathrm{e}^{\frac{k}{m}t}u &= C_1 \\
u(t) &= C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}
\end{aligned}$$

Bruker initialbetingelsen til å finne $C_1 = u_0$.

$$u(t) = u_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{ku}{m} &= 0 \\
\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u &= \int(-\frac{k}{m})\,\mathrm{d}t \\
\ln|u| &= -\frac{k}{m}t + C_2 \\
u(t) &= C_3\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \\
u(t) &= u_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}
\end{aligned}$$

$\boxed{28}$ Vi har følgende sammenheng

$$\text{Endringsraten av CO i rommet} = \text{Raten CO kommer inn} - \text{Raten CO går ut}$$

La $y(t)$ være mengden CO i rommet, og $V = 4500$ være volumet av rommet. Da blir

$$\text{Raten CO går ut} = \frac{y(t)}{V} \cdot \text{Raten luft blir pumpet ut}$$

Bruk at luft blir pumpet inn og ut med samme rate $0,3$ og luften som blir pumpet inn inneholder 4% CO, da får vi av den første sammenhengen

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0,3 \cdot \frac{4\%}{100\%} - \frac{0,3}{4500} y(t)$$

Vi setter denne på standard form.

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{0,3}{4500} y(t) = 0,3 \cdot 0,04$$

Her er $P = \frac{0,3}{4500}$ og $Q = 0,3 \cdot 0,04$, denne differensialligningen kan løses ved å multiplisere med integrerende faktor $v(t) = \mathrm{e}^{\int P\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t}$. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t} y' + \frac{0,3}{4500} \mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t} y &= 0,3 \cdot 0,04 \mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t} \\
(y\mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t})' &= 0,3 \cdot 0,04 \mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t} \\
y\mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t} &= \int 0,3 \cdot 0,04 \mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t}\,\mathrm{d}t = 4500 \cdot 0,04 \mathrm{e}^{\frac{0,3}{4500}t} + C
\end{aligned}$$

Ser at $4500 \cdot 0,04 = 180$. Bruk så initialbetingelsen $y(0) = 0$ til å finne $C = -180$, det gir

$$y(t) = 180 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{0,3}{4500}t}\right)$$

I oppgaven spør de om hvilken t som gir $\frac{y(t)}{4500} = \frac{0,01\%}{100\%}$.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{0,01}{4500 \cdot 100} \\
1 - \mathrm{e}^{-\frac{0,3}{4500}t} &= 0,0025 \\
\mathrm{e}^{-\frac{0,3}{4500}t} &= 1 - 0,0025 = 0,9975 \\
-\frac{0,3}{4500} t &= \ln(0,9975) \\
t &= -\frac{4500}{0,3} \ln(0,9975) \approx 38
\end{aligned}$$

Det tar altså cirka 38 minutter før karbonmonoksidkonsentrasjonen når $0,01\%$.

Avsnitt 15.3

$\boxed{2}$ a) Av likning (1) får ein at farta til skipet er lik

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m},$$

der $v_0 = v(0) = 9$ m/s, $k = 59000$ kg/s og $m = 51000000$ kg. Ved å integrere får ein at

$$s(t) = \int v(t)\, dt = v_0 \int e^{-kt/m}\, dt = C - \frac{mv_0}{k} e^{-kt/m}.$$

Konstanten C finn ein ved å bruke at $s(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{mv_0}{k} e^{-k\cdot 0/m} = \frac{mv_0}{k}$. Så

$$s(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-kt/m}).$$

Strekninga skipet driv finn ein ved å finne grensa $\lim_{t\to\infty} s(t)$. Strekninga skipet driv er difor lik

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-kt/m}) = \frac{mv_0}{k} \approx 7,78\,\text{km}.$$

b) Tida det tek før skipet driv i 1 m/s er lik

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\ln v_0 - \frac{kt}{m} = \ln 1$$
$$\Downarrow$$
$$t = \frac{m \ln v_0}{k} \approx 1899.$$

Det tek med andre ord tilnærma lik $1899/60 = 31{,}7$ minutt før skipet driv med ei fart på 1 m/s.

Avsnitt 15.4

$\boxed{2}$ Eulers metode er gitt som

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\mathrm{d}x$$

I denne oppgaven er $f(x, y) = x(1 - y)$, $\mathrm{d}x = 0.2$, $y_0 = 0$ og $x_n = 1 + n\mathrm{d}x$. Dette gir

$$y(1.2) \approx y_1 = 0 + 1 \cdot (1 - 0) \cdot 0.2 = 0.2$$
$$y(1.4) \approx y_2 = 0.2 + 1.2 \cdot (1 - 0.2) \cdot 0.2 = 0.392$$
$$y(1.6) \approx y_3 = 0.392 + 1.4 \cdot (1 - 0.392) \cdot 0.2 = 0.5622$$

De eksakte verdiene finner vi ved å løse den separable differensialligningen.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(1 - y)$$
$$\int \frac{1}{1 - y}\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$$
$$-\ln|1 - y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$
$$y(x) = 1 - C_2 e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Siden $y(1) = 0$ får vi $C_2 = e^{\frac{1}{2}}$.

$$y(x) = 1 - e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} y(1.2) &= 0.1975 \\ y(1.4) &= 0.3812 \\ y(1.6) &= 0.5416 \end{aligned}$$

12 Forbedret Eulers metode er gitt som

$$\begin{aligned} z_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\mathrm{d}x \\ y_n &= y_{n-1} + \left[\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, z_n)}{2}\right]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

I denne oppgaven er $f(x, y) = x(1 - y)$, $\mathrm{d}x = 0.2$, $y_0 = 0$ og $x_n = 1 + n\mathrm{d}x$. Dette gir

n	x_n	z_n	y_n	$y(x_n)$
0	1.0	-	0	0
1	1.2	0.2000	0.1960	0.1975
2	1.3	0.3890	0.3780	0.3812
3	1.4	0.5522	0.5368	0.5416

13 Eulers metode er gitt som

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\mathrm{d}x$$

I denne oppgaven er $f(x, y) = 2xe^{x^2}$, $y_0 = 2$, $x_0 = 0$ og $\mathrm{d}x = 0.5$, 0.1 og 0.01. Vi skal estimere $y^\star = y(x^\star)$ for $x^\star = 1$ ved hjelp av data (her: MATLAB).

```
% oppg. 15.4.13

function euler(dx)

x = 0;
y = 2;
xstar = 1;

while x < xstar
    ystar = y + 2*x*exp(x^2)*dx;
    x = x + dx;
    y = ystar;
end

ystar

end
```

dx	$y^\star$
0.5	2.6420
0.1	4.0020
0.01	3.6912

Den eksakte verdien finner vi ved å løse den separable differensialligningen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xe^{x^2}$$
$$y = \int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = e^{x^2} + C$$

Siden $y(0) = 2$ får vi $C = 1$.

$$y(x) = 1 + e^{x^2}$$

Dette gir $y(1) = 3,7183$.

Eksamensoppgaver

50 Hvalbestanden oppfyller differensialligningen

$$\frac{dP}{dt} = ke^{-\alpha t}P, \qquad \text{der } k \text{ er en konstant.}$$

Differensialligningen er separabel, vi separerer og integrerer:

$$\frac{dP}{P} = ke^{-\alpha t}\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln P = -\tfrac{k}{\alpha}e^{-\alpha t} + C \quad \text{som gir} \quad P(t) = C_1 e^{-(k/\alpha)e^{-\alpha t}} \quad (C_1 = e^C).$$

$P(0) = P_0$ gir $C_1 = P_0 e^{k/\alpha}$ og løsningen blir

$$P(t) = P_0 e^{(k/\alpha)(1-e^{-\alpha t})}.$$

Siden $\alpha > 0$ er $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} = 0$ og følgelig er $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_0 e^{k/\alpha}$ som er en konstant.

90 a) Stigningstallet til tangenten til grafen til T gjennom punktet $(0, T_0)$ er gitt ved

$$\frac{dT}{dx}(0, T_0) = -\frac{aT_0^2}{1 + b\cdot 0} = -aT_0^2.$$

Ligningen for tangenten er da gitt ved

$$y - T_0 = -aT_0^2(x - 0) \Leftrightarrow y = T_0 - aT_0^2 x.$$

Vi bruker tangentligningen til å finne en tilnærmet verdi for $T(x)$ når $x = 1.2M$:

$$T(1.2) \approx y(1.2) = T_0 - aT_0^2 \cdot 1.2 = 273.15 - 2.49\cdot 10^{-5}\cdot 273.15^2 \cdot 1.2 \approx 270.92K.$$

b) Differensialligningen er separabel. Vi separerer og integrerer:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{aT^2}{1+bx}$$
$$\Downarrow$$
$$-\int \frac{1}{aT^2}\,dT = \int \frac{1}{1+bx}\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{aT} = \frac{1}{b}\ln|1+bx| + C$$
$$\Downarrow$$
$$T = \frac{1}{\frac{a}{b}\ln|1+bx| + C}.$$

Bruk initialbetingelsen til å finne C: $T_0 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = \frac{1}{T_0}$. Det følger at

$$T(x) = \frac{1}{\frac{a}{b}\ln|1+bx| + \frac{1}{T_0}} = \frac{bT_0}{aT_0\ln|1+bx| + b}.$$

Den nøyaktige verdien for $T(1.2)$ er følgelig

$$T(1.2) = \frac{0.018 \cdot 273.15}{2.49 \cdot 10^{-5} \cdot 273.15 \ln|1 + 0.018 \cdot 1.2| + 0.018} \approx 270.96K.$$