Avsnitt 3.7

$\boxed{95}$ Vi antar at $x > 0$ og får

$$\begin{aligned}
\ln y &= (\ln x)^2 \\
\frac{y'}{y} &= \frac{2\ln x}{x} \\
y' &= \frac{2y\ln x}{x} \\
&= \frac{2x^{\ln x}\ln x}{x}.
\end{aligned}$$

Avsnitt 3.8

$\boxed{6}$

a) $2\pi/3$

b) $\pi/4$

c) $5\pi/6$

Avsnitt 3.9

$\boxed{13}$ En stige med lengde 13 ft lener seg mot en vegg, og den begynner å skli. Studer figuren gitt i læreboken nøye. Vi får oppgitt at når avstanden fra veggen $x(t) = 12$ ft så beveger foten av stigen seg med hastighet $x'(t) = 5$ ft/sec.

a) Vi skal finne hvor fort toppen av stigen beveger seg nedover veggen, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, når foten av stigen er 12 ft fra veggen. Ved Pytagoras har vi at $x(t)^2 + y(t)^2 = 13^2$. Dermed er avstanden fra bakken til veggen gitt ved $y(t) = \sqrt{13^2 - x(t)^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$. Vi deriverer implisitt og finner

$$\begin{aligned}
x(t)^2 + y(t)^2 &= 13^2, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right) &= 0, \\
2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 0, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{12}{5}5\ \mathrm{ft/sec} = -12\ \mathrm{ft/sec}.
\end{aligned}$$

Toppen av stigen beveger seg nedover veggen med en fart på 12 ft/sec.

b) Vi skal finne hvor fort arealet A avgrenset av stigen, bakken og veggen forandrer seg når $x(t) = 12$ ft. Arealet er gitt ved

$$A(t) = \frac{1}{2}x(t)\cdot y(t).$$

Ved derivasjon finner vi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}y + \frac{1}{2}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}(5\cdot 5 + 12\cdot(-12))\ \mathrm{ft^2/sec} \\
&= -\frac{119}{2}\ \mathrm{ft^2/sec} = -59.5\ \mathrm{ft^2/sec}.
\end{aligned}$$

c) Vi skal finne hvor fort vinkelen θ mellom stigen og bakken forandrer seg når $x(t) = 12$ ft. Vinkelen er gitt ved $\theta = \arctan(y/x)$. Ved derivasjon finner vi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan\frac{y}{x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}x - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}\cdot\frac{(-12)\cdot 12 - 5\cdot 5}{12^2}\ \mathrm{rad/sec} \\ &= \frac{12^2}{12^2+5^2}\cdot\frac{(-12)\cdot 12 - 5\cdot 5}{12^2}\ \mathrm{rad/sec} = -1\ \mathrm{rad/sec}.\end{aligned}$$

19 Vi får oppgitt at $V = \frac{\pi}{3}y^2(3\cdot 13 - y)$ og at $\frac{dV}{dt} = -6$.

a) Vi skal finne $\frac{dy}{dt}$ når $y = 8$. Vi deriverer:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}2y\frac{dy}{dt}(3\cdot 13 - y) - \frac{\pi}{3}y^2\frac{dy}{dt}$$

og setter inn $y = 8$ og $\frac{dV}{dt} = -6$:

$$-6 = \frac{\pi}{3}\cdot 16\frac{dy}{dt}(39-8) - \frac{\pi}{3}\cdot 64\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{24\pi}\ \mathrm{m/min}.$$

b) Ved Pytagoras får vi at $r^2+(13-y)^2 = 13^2 = 169 \Rightarrow r^2 = y(26-y) \Rightarrow r = \sqrt{y(26-y)}$ m.

c) Vi skal finne $\frac{dr}{dt}$ når $y = 8$. Fra b) har vi at $r = \sqrt{y(26-y)}$. Vi deriverer:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y(26-y)}}\left(\frac{dy}{dt}(26-y) - y\frac{dy}{dt}\right)$$

Fra a) har vi at $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{24\pi}$ når $y = 8$. Vi setter inn $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{24\pi}$ og $y = 8$:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{8(26-8)}}\left(-\frac{1}{24\pi}(26-8) - 8\cdot\left(-\frac{1}{24\pi}\right)\right) \\ &= \frac{-5}{288\pi}\ \mathrm{m/min}\end{aligned}$$

Avsnitt 3.10

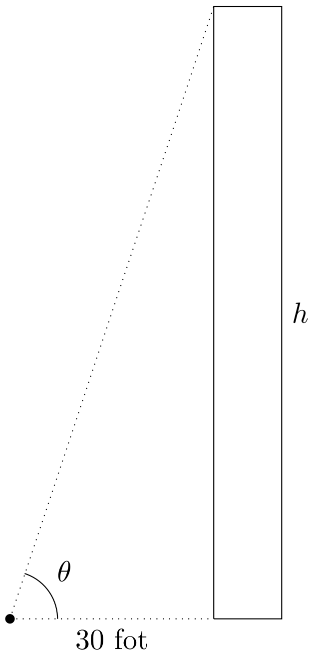
54 En landmåler står 30 fot fra bunnen av en bygning som vist i Figur 1. Høyden h (i fot) på bygningen er gitt ved

$$h(\theta) = 30\tan\theta\ .$$

Vi ønsker å vite hvor nøyaktig vinkelen θ må måles dersom den estimerte høyden på bygget ikke skal avvike fra byggets faktiske høyde med mer enn 4%. Med andre ord, vi vil finne $d\theta$ slik at

$$\frac{dh}{h(\theta_0)} = \frac{h'(\theta_0)d\theta}{h(\theta_0)} < 0,04\ ,$$

hvor $\theta_0 = 75^\circ = 5\pi/12$ (radianer).



Figur 1: (Oppgave 3.10.54) En landmåler står 30 fot fra en bygning og måler vinkelen θ.

Den deriverte av funksjonen h er

$$h'(\theta) = 30(1 + \tan^2 \theta) \ .$$

Dermed følger det at

$$\frac{dh}{h(\theta_0)} = \frac{(1 + \tan^2 \theta_0)}{\tan \theta_0} d\theta \ ,$$

hvilket ikke vil ikke overstige $0,04$ i absoluttverdi dersom

$$|d\theta| < 0,04 \cdot \frac{\tan \theta_0}{(1 + \tan^2 \theta_0)} = 0,04 \cdot \frac{\tan 5\pi/12}{(1 + \tan^2 5\pi/12)} = 0,01 \ .$$

Til slutt merker vi oss at $0,01$ radianer svarer til $0,57°$. Altså må målefeilen for vinkelen θ ikke overstige $0,57°$ dersom målefeilen i byggets høyde ikke skal overstige 4%.

Avsnitt 3.11

$\boxed{44}$ La $f(x) = \sinh x$. Vi ønsker å vise at

$$f^{-1}(x) = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \ , \quad -\infty < x < \infty \ .$$

Vi går fram som i kapittel 1.5, og skriver $y = \sinh x$. Fra definisjonen av $\sinh x$ får vi at

$$2y = e^x - e^{-x}.$$

Om vi multipliserer begge sider av ligningen med e^x og samler alle ledd på en side, finner vi at

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

Dette er en andregradsligning for e^x, og ved andregradsformelen får vi

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Funksjonen e^x er positiv for alle x. Altså må vi velge positivt fortegn til $\sqrt{y^2+1}$. Ved å ta den naturlige logaritmen av begge sider i ligningen finner vi

$$x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) .$$

Det følger at

$$f^{-1}(x) = \sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) ,$$

og denne funksjonen er definert for alle $x \in (-\infty, \infty)$ da $f(x) = \sinh x$ er en 1-1 funksjon med hele tallinja som sin verdimengde.

Avsnitt 4.1

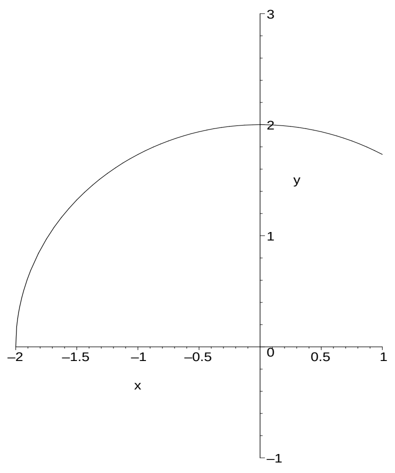
$\boxed{23}$ Vi skal finne absolutt maksimum og absolutt minimum verdiene for funksjonen $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ på intervallet $-2 \leq x \leq 1$. Vi finner $g'(x)$ og setter denne lik 0,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} = 0.$$

Utrykket over er lik 0 når telleren er 0, dvs for $x = 0$. Videre legger vi merke til at $g'(x)$ er definert for alle verdier i intervallet vårt, unntatt i endepunktet $x = -2$. Vi har

$$g(0) = 2, \;\; g(-2) = 0, \;\; g(1) = \sqrt{3}.$$

Dermed er absolutt maximum 2 gitt i punktet $x = 0$ og absolutt minimum er 0 gitt i endepunktet $x = -2$.



Figur 2: Oppgave 4.1.23: Funksjonen $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ for $-2 \leq x \leq 1$ med absolutt maksimum i $(0, 2)$ og absolutt minimum i $(-2, 0)$.

$\boxed{70}$ Vi ser på tredjegradspolynomet $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hvor det er naturlig å anta at $a \neq 0$.

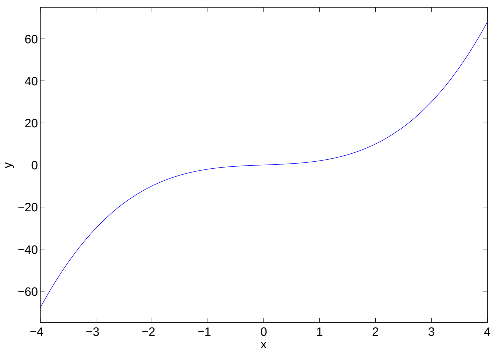
a) Vi skal vise at f kan ha 0, 1 eller 2 kritiske punkter. Den deriverte av funksjonen f er

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

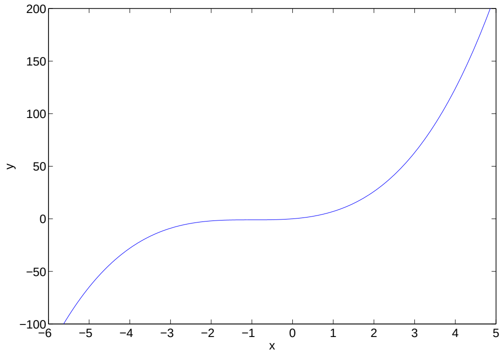
Funksjonen f har kritiske punkter der den deriverte er null, altså for de x hvor

$$3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

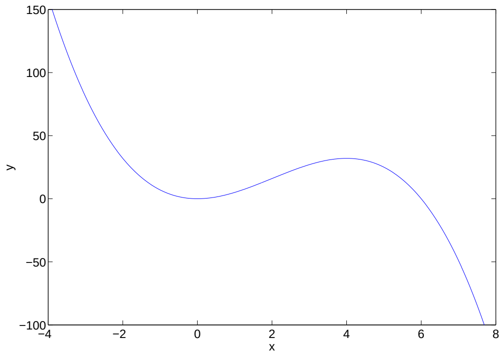
Dette er en andregradsligning som vi vet har 0, 1 eller 2 løsninger, avhengig av konstantene a, b og c. Eksempler er vist i Figur 3.



(a) Ingen kritiske punkter: Funksjonen $f(x) = x^3 + x$ har ingen kritiske punkter.



(b) Ett kritisk punkt: Funksjonen $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ har et kritisk punkt i $x = -1$.



(c) To kritiske punkter: Funksjonen $f(x) = -x^3 + 6x^2$ har to kritiske punkter, i $x = 0$ og i $x = 4$.

Figur 3: (Oppgave 4.1.70) Tredjegradspolynomer med henholdsvis null, ett og to kritiske punkter.

b) Vi vet at $f'(x) = 0$ dersom f tar en lokal ekstremverdi i x. Det er imidlertid ikke slik at alle kritiske punkter er lokale maksima/minima for f. De kritiske punktene for en kubisk funksjon f er gitt ved

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}.$$

Når $4b^2 < 12ac$ har f ingen kritiske punkter. Da har f heller ingen lokale ekstremverdier.

Når $4b^2 = 12ac$ har f ett kritisk punkt, $x = -b/3a$. Da er $f'(x)$ gitt ved

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3ax^2 + 2bx + \frac{4b^2}{12a} = 3a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^2.$$

Vi ser at $f'(x) > 0$ for alle $x \neq -b/3a$ dersom $a > 0$, og $f'(x) < 0$ for alle $x \neq -b/3a$ dersom $a < 0$. Altså er dette ene kritiske punktet $x = -b/3a$ et sadelpunkt (ikke et lokalt minimum/maksimum).

Når $4b^2 > 12ac$ har f to kritiske punkter, x_1 og x_2, hvor $x_1 < -b/3a < x_2$. Vi finner at

$$f''(x) = 6ax + 2b \ ,$$

som kun er null når $x = -b/3a$. Dermed har vi at $f''(x_1) \neq 0$ og $f''(x_2) \neq 0$, og ved andrederiverttesten er x_1 og x_2 lokale minima/maksima for f.

Vi konkluderer med at et tredjegradspolynom f kan ha null eller to lokale ekstremverdier (men ikke en).

Avsnitt 4.2

$\boxed{5}$ Funksjonen $f(x) = x^{2/3}$ er kontinuerlig på intervallet $[-1, 8]$, men der er ikke deriverbar i punktet $x = 0$ siden $f'(x) = 2/3 \cdot 1/x^{1/3}$. Dermed tilfredsstiller den ikke betingelsene i Middelverditeoremet.

$\boxed{6}$ Funksjonen $f(x) = x^{4/5}$ er kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ og deriverbar i det indre av $(0, 1)$. ($f'(x) = (4/5) \cdot (1/x^{1/5})$ og $f(x)$ er ikke deriverbar i $x = 0$.) Dermed tilfredsstiller den betingelsene i Middelverditeoremet.

$\boxed{7}$ Funksjonen $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ er kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ og deriverbar i det indre av $(0, 1)$. ($f'(x) = 1/2 \cdot (1 - 2x)/\sqrt{x(1-x)}$ og $f(x)$ er ikke deriverbar i $x = 0$ og $x = 1$.) Dermed tilfredsstiller den betingelsene i Middelverditeoremet.

$\boxed{8}$ Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \leq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

er ikke kontinuerlig på intervallet $[-\pi, 0]$ siden

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 = f(0).$$

Dermed tilfredsstiller den ikke betingelsene i Middelverditeoremet.

$\boxed{20}$ Vi skal vise at funksjonen $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}$ har akkurat ett nullpunkt på intervallet $(-\infty, \infty)$. Vi starter med å se på den deriverte av $r(\theta)$,

$$r'(\theta) = 2 + 2\cos\theta\sin\theta > 0 \ \text{ for alle } \ \theta,$$

siden $-1 < \cos\theta\sin\theta$. Siden $r(\theta)$ er kontinuerlig og den deriverte gir oss at $r(\theta)$ er strengt stigende, kan funksjonen maksimalt ha ett nullpunkt.

Videre er $r(-\pi) = -2\pi - 1 + \sqrt{2} < 0$ og $r(\pi) = 2\pi - 1 + \sqrt{2} > 0$. Siden $r(\theta)$ er kontinuerlig vet vi fra Skjæringssetningen (Intermediate Value Theorem) at funksjonen har minst ett nullpunkt. Dermed kan vi konkludere med at $r(\theta)$ har akkurat ett nullpunkt.

$\boxed{58}$ La $f(x) = \sin x$. Vi vil vise at

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$$

for alle tall a og b.

Funksjonen f er kontinuerlig og deriverbar på hele tallinja. Vi har $f'(x) = \cos x$, og dermed ser vi at $-1 \leq f'(x) \leq 1$ for alle x.

Anta først at $a \leq b$. Fra middelverdisetningen følger det at

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

for en $c \in (a, b)$. Vi tar absoluttverdien av begge sider i ligningen, og utnytter at $|f'(c)| \leq 1$ for alle c. Vi får da

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1$$

eller

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \ .$$

Hvis $b \leq a$ bruker vi middelverdisetningen på intervallet $[b, a]$, og oppnår samme ulikhet.

Eksamensoppgaver

14 Anta at kurven har en horisontal tangent i punktet (x_0, y_0). Da er y deriverbar mhp. x i punktet x_0 og $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = 0$. Ved implisitt derivasjon med hensyn på x finner vi

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}.$$

Vi setter inn at $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = 0$ og får sammenhengen $3x_0^2 = y_0$. Setter vi inn dette i den opprinnelige ligningen finner vi

$$x_0^3 + (3x_0^2)^3 = x_0 \cdot 3x_0^2 - 1$$

$$x_0^3 + 27x_0^6 = 3x_0^3 - 1$$

$$27(x_0^3)^2 - 2x_0^3 + 1 = 0.$$

Da den siste ligningen ikke har noen løsning, kan vi konkludere at antakelsen vår om at kurven har en horisontal tangent ikke holder. Altså har kurven ingen horisontal tangent i noen punkter.