Eksamen TMA4105
20. august 2010

Løsningsforslag

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ Gradienten til f er $\nabla f = \langle 4y - 4x, 4x - 4y^3 \rangle$, og den Hessiske determinanten er

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{vmatrix} = 48y^2 - 16.$$

a) Vi finner alle de kritiske punktene ved å løse ligningene

$$\begin{aligned} 4y - 4x &= 0, \\ 4x - 4y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Setter vi $y = x$ inn i den andre ligningen får vi $x = x^3$, som har løsningene 0, 1 og -1. Altså er det nøyaktig 3 kritiske punkter, $(-1, -1)$, $(0, 0)$ og $(1, 1)$.

b) Den Hessiske determinanten er negativ i $(0, 0)$, så dette er et sadelpunkt. De to andre kritiske punktene er lokale maksimumspunkter, fordi den Hessiske determinanten er positiv og $-4 < 0$.

$\boxed{2}$ Kurven gitt ved $xy^2 = 8$ er symmetrisk om x-aksen og ligger i høyre halvplan. Vi konsentrerer oss derfor om den delen av kurven som ligger i første kvadrant, dvs $x > 0$ og $y > 0$. Vi finner minimum blant punktene (x, y) som tilfredstiller ligningene:

$$\begin{aligned} \nabla(x^2 + y^2) - \lambda \nabla(xy^2 - 8) &= 0, \\ xy^2 - 8 &= 0. \end{aligned}$$

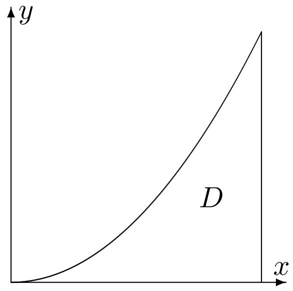
Dette gir 3 ligninger

$$\begin{aligned} 2x - \lambda y^2 &= 0, \\ 2y - \lambda 2xy &= 0, \\ xy^2 &= 8. \end{aligned}$$

Det er mange måter å løse disse ligningene på. Her er en måte. Siden $xy^2 = 8$ kan hverken x eller y være 0, så vi kan dele den andre ligningen med $2y$ uten å miste noen løsninger. Vi finner da $\lambda = x^{-1}$. Fra den siste ligningen får vi $y^2 = 8x^{-1}$. Setter vi dette inn i den første ligningen får vi $2x = x^{-1} 8x^{-1}$, eller $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Fra den siste ligninge får vi $y = (8x^{-1})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{6}}$. Siden vi kun finner ett kritisk punkt i første kvadrant, og avstanden til punkter på kurven kan bli så stor man bare vil, må dette være et minimumspunkt, og avstanden er

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{4}{3}+1})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{4}{3}}(1 + 2))^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} = 2.749459275\ldots.$$

$\boxed{3}$ **a)** Skisse av området D.

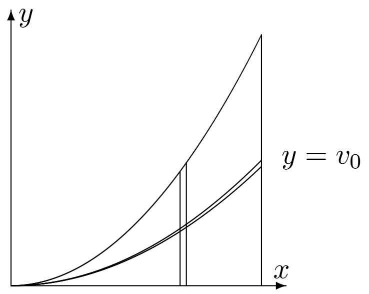


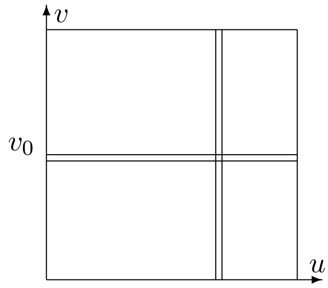
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{dy}{\sqrt{y(1+x^2)}} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_0^{x^2} y^{-\frac{1}{2}}\, dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) 2x\, dx = 2(\sqrt{2}-1).$$

b) Skisse av områdene D og R.





De horisontale linjestykkene i R svarer til parabler i D. Vertikale linjestykker i R svarer til litt kortere vertikale linjestykker i D. Vi har

$$dxdy = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| dudv = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2uv & u^2 \end{matrix} \right\| dudv = u^2 dudv, \quad \text{så}$$

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{y(1+x^2)}} = \iint_R \frac{u^2 dudv}{\sqrt{u^2 v(1+u^2)}} =$$

$$\iint_R \frac{u\, dudv}{\sqrt{v(1+u^2)}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{v}} \int_0^1 \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} = \left[2v^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \left[(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

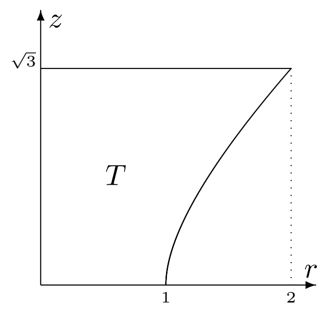
$\boxed{4}$ **a)** $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} =$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x\cos y^2 & (z - x^2 y \sin y^2) & y \end{vmatrix} = \langle 1-1, 0, -2xy\sin y^2 + 2xy \sin y^2 \rangle = \mathbf{0}.$$

b) Siden $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ og $\boldsymbol{F}$ er definert i hele rommet er ethvert linjeintegral kun avhengig av startpunkt og endepunkt og uavhengig av veien. Kurven C starter i punktet $P = (0,0,0)$ og ender i punktet $Q = (1,0,0)$. Dersom I er det rette linjestykket fra P til Q, parametrisert ved $\boldsymbol{r}(t) = t\,\boldsymbol{i}, \quad 0 \le t \le 1$, har vi

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, ds = \int_I \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, ds = \int_0^1 \langle t, 0, 0\rangle \langle 1, 0, 0 \rangle dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{5}$ **a)** Ligningen for flaten i sylinderkoordinater er $r^2 - z^2 = 1$. Snittet mellom T og halvplanet gitt ved $\theta = \theta_0$ er tegnet i figuren til høyre.



b) For en gitt verdi av θ og z har vi $0 \leq r \leq \sqrt{1+z^2}$. Videre har vi $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq z \leq \sqrt{3}$. Volumet blir derfor

$$\begin{aligned}
\iiint_T dV &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r dr d\theta dz \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\sqrt{1+z^2}} d\theta \right) dz \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(1+z^2) \right) d\theta \right) dz \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi \left(\frac{1}{2}(1+z^2) \right) dz \\
&= \pi \int_0^{\sqrt{3}} (1+z^2) dz = \pi \left[z + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

c) Vi har $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3$. Dersom vi lar U og V betegne henholdsvis toppflaten og bunnflaten til T, så sier divergensteoremet at

$$\iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{F} dV = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \iint_U \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma + \iint_V \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

Vi har $\iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{F} dV = 6\pi\sqrt{3}$. Siden $z = 0$ på bunnen er $\iint_V \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0$, og siden $z = \sqrt{3}$ på toppen er $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k}\, dxdy = \sqrt{3} dxdy$. Vi finner derfor at fluksen gjennom toppen er $\sqrt{3}$ ganger arealet. Siden toppen er en sirkelskive med radius $\sqrt{3}$ får vi $\iint_U \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 3\pi\sqrt{3}$. Altså er

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \boldsymbol{F} dV - \iint_U \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma - \iint_V \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 3\pi\sqrt{3}.$$