



Norges teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2 vår 2010

Matlabøving 2

Studieprogram:

Navn:

1.

2.

3.

4.

NB! Les gjennom følgende!

Besvarelsen kan leveres som gruppearbeid med *maks.* 4 personer i en gruppe. Alle deltagerne på gruppen må komme fra *samme studieprogram*. Det er viktig at alle deltagerne fører på navnet sitt over!

Besvarelsen som skal leveres, består av to deler:

- **Oppgavearkene, med utfylte svar der hvor det er angitt.**
- **Utskrifter av utvalgte plot laget i Matlab.**

Det angis i oppgaveteksten hvilke plot som skal legges ved. Plottene må merkes tydelig ved å skrive på oppgavenummer. (Feks. merkes plottet til oppgave 1(a) med “1(a)”.) Det er lov å legge ved ekstra svarark hvis du trenger mer plass.

NB! Alle arkene må stiftes sammen til slutt!

- 1 **Hensikt:** Få trening i å skrive dobbeltintegraler om til polarkoordinater. Bruke Matlab til å regne ut integralene (eksakt eller numerisk) og til å skissere området det integreres over, samt det legemet hvis volum dobbeltintegralet gir.

Matlabkommandoer: plot, fill, quad2d, int

Sett

$$f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

og la R være det plane området som ligger til høyre for y -aksen, over linjen $y = 1/2 + x/2$ og under kurven $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$.

Vi skal regne ut dobbeltintegralet

$$\iint_R f(x, y) dA,$$

ved å skrive det om til polarkoordinater.

Merk: I delpunktene (a)–(e) er det greiest å regne for hånd (altså uten å bruke Matlab).

- a) Vis at kurven $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ (for $|x| \leq 1$) er en del av en sirkel. Skriv ligningen for denne sirkelen på standardformen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2$, der (x_0, y_0) er sirkelens sentrum og c er dens radius:

- b) Finn det punktet i 1. kvadrant der kurven $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ skjærer linjen $y = 1/2 + x/2$:

- c) Finn uttrykket for sirkelen fra punkt (a) i polarkoordinater, dvs. beskriv den med en ligning på formen $r = g(\theta)$:

- d) Finn uttrykket for linjen $y = 1/2 + x/2$ i polarkoordinater:

- e) Skriv $\iint_R f(x, y) dA$ som et iterert dobbeltintegral på formen $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$:

- f) Prøv å regne ut integralet fra forrige punkt med Matlab. Det viser seg da at Matlab ikke greier å regne det ut eksakt (hvis Matlab greier det, har du satt opp feil integral). Du kan da bruke funksjonen `quad2d`, for å finne en numerisk tilnærming, se eget notat for en forklaring av bruken av `quad2d`. Alternativt kan du forsøke med `double(int(...))`, se igjen notatet.

$$\iint_R f(x, y) dA \approx$$

- g) Bruk Matlab til å tegne området R (dvs. tegn randen som avgrenser R). (Se eksempelfilen knyttet til denne oppgaven.) Legg ved utskrift av plottet, merket med 1(g).
- h) Beskriv området R i polarkoordinater (bruk svarene dine fra (a) og (d), samt skissen fra forrige punkt.) Svaret skal gis på formen $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)$:

- i) Uttrykk $\iint_R f(x, y) dA$ i polarkoordinater:

$$\iint_R f(x, y) dA =$$

Bruk Matlab til å regne ut dette integralet (Matlab skal nå gi et eksakt svar, men siden uttrykket er langt, trenger du ikke skrive det ut her). (Merk: Du kan bruke `double(ans)` til å sjekke at svaret stemmer med det du fant i punkt (f).)

- j) Dobbelintegralet $\iint_R f(x, y) dA$ er volumet av det romlige legemet som ligger over området R i xy -planet og under grafen $z = f(x, y)$. Bruk Matlab til å tegne dette legemet. (Eksempelfilen viser hvordan dette gjøres.) Legg ved utskrift av tegningen, merket med 1(j).

- 2 **Hensikt:** Få trening i å sette opp trippelintegraler i xyz -koordinater. Bruke Matlab til å regne ut integraler og til å skissere området det integreres over.

Matlabkommandoer: `surf`, `int`

La T være legemet i 1. oktant avgrenset av planene $x = 0$, $y = x$ og $2x - y + 4z = 2$, og av de paraboliske sylindrene $x^2 + y = 2$ og $2y^2 + z = 9$.

- a) Skriv $\iiint_T F(x, y, z) dV$ som et iterert trippelintegral på formen

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{k(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx$$

Du kan forøvrig kjøre skriptfilen `Ex0ppg2.m` på websiden for denne øvingen om du vil se en tegning av grunnflaten og hele legemet.

- b) Anta at legemet har massetetthet $\delta = \frac{1}{1+x^2}$. Regn ut følgende størrelser ved hjelp av Matlab (og svaret på punkt (a)). Bruk kommandoen `double` på de utregnede integralene, og gi svarene som desimaltall (du kan runde av til 3 desimaler):

$$M \approx$$

$$M_{yz} \approx$$

$$M_{xz} \approx$$

$$M_{xy} \approx$$

- c) Finn tyngdepunktet (sentroiden) til T :

$$\bar{x} \approx$$

$$\bar{y} \approx$$

$$\bar{z} \approx$$

- 3 **Hensikt:** Sette opp trippelintegraler i kulekoordinater. Bruke Matlab til å regne ut integraler og til å skissere området det integreres over.

Matlabkommandoer: `surf`, `int`

La T være legemet i 1. oktant som er

- avgrenset av koordinatplanene,
- ligger innenfor kuleflaten S_1 med radius 2 og sentrum i origo, og
- ligger utenfor kuleflaten S_2 med radius 1 og sentrum på x -aksen i punktet $x = 1$.

- a) Skriv ligningen for S_1 i kulekoordinater, på formen $\rho = f(\theta, \phi)$.

$\rho =$

- b) Skriv ligningen for S_2 i kulekoordinater, på formen $\rho = f(\theta, \phi)$. (Hint: Skriv først opp ligningen for S_2 i xyz -koordinater.)

$\rho =$

- c) Beskriv T i kulekoordinater, på formen $a \leq \theta \leq b$, $c \leq \phi \leq d$, $f(\theta, \phi) \leq \rho \leq g(\theta, \phi)$.

- d) Anta at legemet har massetetthet $\delta = 4 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4 - \rho$. Uttrykk massen M av T som et iterert trippelintegral på formen

$$\int_a^b \int_c^d \int_{f(\theta, \phi)}^{g(\theta, \phi)} \delta \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta,$$

og bruk Matlab til å regne ut:

$M =$

- e) Bruk Matlab til å tegne området T . Du kan ta utgangspunkt i den utlagte filen `Ex3e.m`. Legg ved utskrift av plottet, merket med 3(e).

- 4 **Hensikt:** Bruke Matlab til å regne ut arbeidet gjort av et vektorfelt langs en kurve i planet, og til å visualisere.

Matlabkommandoer: `quiver3`, `plot3`, `int`, `diff`

Vi ser på vektorfeltet

$$\mathbf{F} = (y + 4x^3y^5z^6)\mathbf{i} + (x^2 + 5x^4y^4z^6)\mathbf{j} + (z + 6x^4y^5z^5)\mathbf{k}$$

og romkurven C parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\sin t)\mathbf{j} + (4\sin^2 t - 2)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a) Bruk Matlab til å plote vektorfeltet og kurven hver for seg og sammen.
- b) Bruk Matlab til å regne ut arbeidet $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$, enten ved å bruke `double(int(...))` eller `quad` (første alternativ er nok kanskje enklest her).

$W =$

- c) Bruk Matlab til å regne ut lengden av kurven C

Lengden av $C \approx$