Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Frivillig midtsemesterprøve TMA4105 Mars 2010

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ **a)**

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \sqrt{2}\cos t\ \boldsymbol{i} + \sqrt{2}\cos t\ \boldsymbol{j} + 2\sin t\ \boldsymbol{k} \quad \text{for} \quad 0 \le t \le 2\pi,\\
\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= -\sqrt{2}\sin t\ \boldsymbol{i} - \sqrt{2}\sin t\ \boldsymbol{j} + 2\cos t\ \boldsymbol{k},\\
\dot{s}(t) &= \sqrt{2\cos^2(t) + 2\cos^2(t) + 4\sin^2(t)} = 2,\\
\boldsymbol{T}(t) &= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\ \boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\ \boldsymbol{j} + \cos t\ \boldsymbol{k},\\
\kappa\boldsymbol{N}(t) &= \frac{\dot{\boldsymbol{T}}}{\dot{s}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\ \boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\ \boldsymbol{j} - \sin t\ \boldsymbol{k}\right),\\
\kappa &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

b) Vi kan skrive posisjonsvektoren på formen

$$\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}\cos t\ (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) + 2\sin t\ \boldsymbol{k}.$$

Dette viser at kurven ligger i planet $x = y$. Videre er

$$|\boldsymbol{r}(t)| = \sqrt{2\cos^2(t) + 2\cos^2(t) + 4\sin^2(t)} = 2,$$

som viser at kurven ligger på sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Altså er C en sirkel med sentrum i origo og radius 2.

$\boxed{2}$ Tangentplanet i punktet P_0 står vinkelrett på gradienten til funksjonen $x^2 - y^2 - z = 0$. Denne gradienten er $2x_0\ \boldsymbol{i} - 2y_0\ \boldsymbol{j} - \ \boldsymbol{k}$. Ligningen for tangenplanet gjennom punktet P_0 er altså

$$2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Sammenligner vi dette med det parallelle planet $4x - 2y - z = 0$, finner vi $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, og siden punktet P_0 ligger på flaten har vi $z_0 = {x_0}^2 - {y_0}^2 = 3$. Punktet er altså $P_0 : (2, 1, 3)$, og ligningen for tangentplanet er $4x - 2y - z = 3$.

$\boxed{3}$ Vi finner de kritiske punktene ved å sette $f_x = f_y = 0$. Vi har $f_x = 3x^2 - 3y$ og $f_y = -3x + \frac{3}{2}y^2$. Vi setter $y = x^2$ inn i uttrykket for f_y og får $2x = x^4$. Vi finner to kritiske punkter, De er $P = (0, 0)$ og $Q = (2^{\frac{1}{3}}, 2^{\frac{2}{3}})$.

Den Hessiske determinanten blir $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 18xy - 9$. Setter vi inn koordinatene til punktet P får vi -9, altså et sadelpunkt. Setter vi inn koordinatene til punktet Q får vi 27, og siden $f_{xx} > 0$ er Q et lokalt minimum.

4 Vi skal finne største og minste verdi av funksjonen $f(x,y) = xy$ over området R begrenset av koordinataksene og kurven $g(x,y) = 2x^{\frac{3}{2}} + y^3 + 5xy = 1$. Gradienten $\boldsymbol{\nabla} g = \langle 3x^{\frac{1}{2}} + 5y, 3y^2 + 5x\rangle$ har positiv $\boldsymbol{i}$-komponent og positiv $\boldsymbol{j}$-komponent i hele første kvadrant, noe som viser at kurven skjærer hver stråle transverselt.

For å få en bedre ide om hvordan området i første kvadrant begrenset av koordinataksene og kurven $g(x,y) = 1$ ser ut finner skjæringspunktene mellom kurven og koordinataksene. Skjæringspunktet med y-aksen er gitt ved $y^3 = 1$, det vil si $y = 1$. Skjæringspunktet med x-aksen er gitt ved $2x^{\frac{3}{2}} = 1$, det vil si $x = 2^{-\frac{2}{3}}$.

Gradienten $\boldsymbol{\nabla} f = \langle y,x\rangle \neq \langle 0,0\rangle$ i det indre av området R, så vi finner alle ekstremalverdiene på randen. Funksjonen er 0 på aksene, så det gjenstår å undersøke f på kurven $g = 1$. Vi bruker Lagranges multiplikatormetode. Det gir 3 ligninger,

$$\begin{aligned} g &= 1, \\ \boldsymbol{\nabla} f &= \lambda \boldsymbol{\nabla} g, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 2x^{\frac{3}{2}} + y^3 + 5xy &= 1, \\ \langle y,x\rangle &= \lambda\langle 3x^{\frac{1}{2}} + 5y, 3y^2 + 5x\rangle. \end{aligned}$$

De siste to ligningene kan skrives

$$\begin{aligned} y(1-5\lambda) &= 3\lambda x^{\frac{1}{2}}, \\ x(1-5\lambda) &= 3\lambda y^2, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} y^2 &= c^2 x, \\ x &= cy^2, \end{aligned}$$

hvor vi har satt $c = \frac{3\lambda}{1-5\lambda}$. I første kvadrant er både $x \neq 0$ og $y \neq 0$, så vi har $c = 1$ og $x = y^2$. Setter vi dette inn i ligningen $g = 1$, får vi

$$2y^3 + y^3 + 5y^3 = 1.$$

Det er bare en løsning, $y = \frac{1}{2}$ og $x = \frac{1}{4}$, og her er $f(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$. Siden dette er det eneste ekstremalpunktet på denne kurven i det indre av første kvadrant, finner vi at største og minste verdi av f i R er henholdsvis $\frac{1}{8}$ og 0.

5 Planet skjærer x-aksen i $x = 2$, y-aksen i $y = 2$, z-aksen i $z = 3$. Det er (i) og (iii) som gir rett volum. Integralene (ii) og (iv) er feil.