Forusetninger

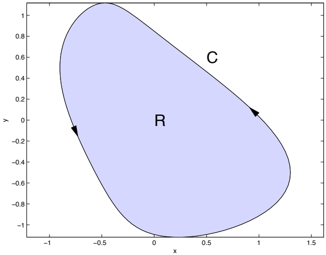
- C stykkevis glatt, enkel, lukket som omslutter R.
- $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j}$. M, N kontinuerlige partiellderiverte på en åpen mengde som inneholder R.

Fluksform

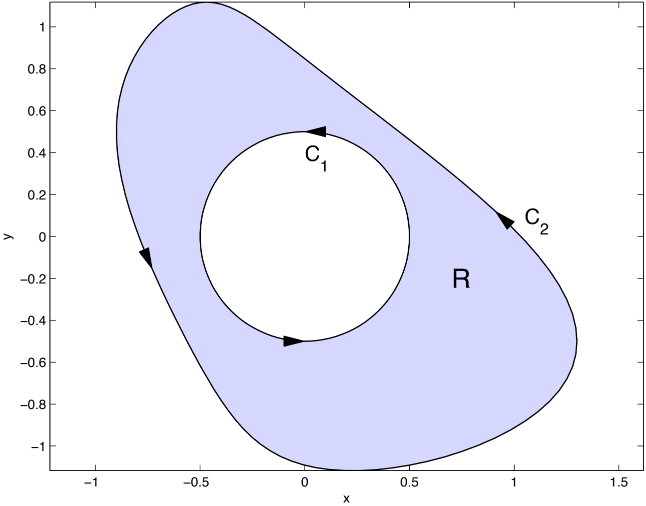
$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}A$$

Sirkulasjonsform

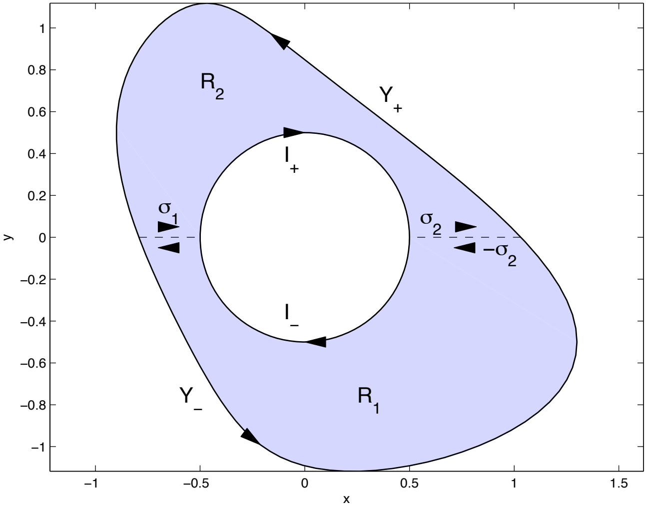
$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,\mathrm{d}s = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}A$$



Områder med hull



Disse kan fikses med to ganger bruk av Green's teorem



To områder

$$\oint_{\text{nedre}} = \int_{Y_-} + \int_{-\sigma_2} + \int_{I_-} + \int_{-\sigma_1} = \iint_{R_1}$$

$$\oint_{\text{øvre}} = \int_{Y_+} + \int_{\sigma_1} + \int_{I_+} + \int_{\sigma_2} = \iint_{R_2}$$

Summér

$$\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2} = \underbrace{\int_{Y_-} + \int_{Y_+}}_{\oint_{C_2}} + \underbrace{\int_{I_+} + \int_{I_-}}_{\oint_{-C_1}}$$

$$+ \underbrace{\int_{\sigma_1} + \int_{-\sigma_1}}_{0} + \underbrace{\int_{\sigma_2} + \int_{-\sigma_2}}_{0}$$

La C_1 være sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, og la C_2 være kurven med ligning $r = \frac{4}{2-\cos\theta}$ i polarkoordinater. C_1 og C_2 orienteres *mot* urviseren, og R betegner området mellom C_1 og C_2.

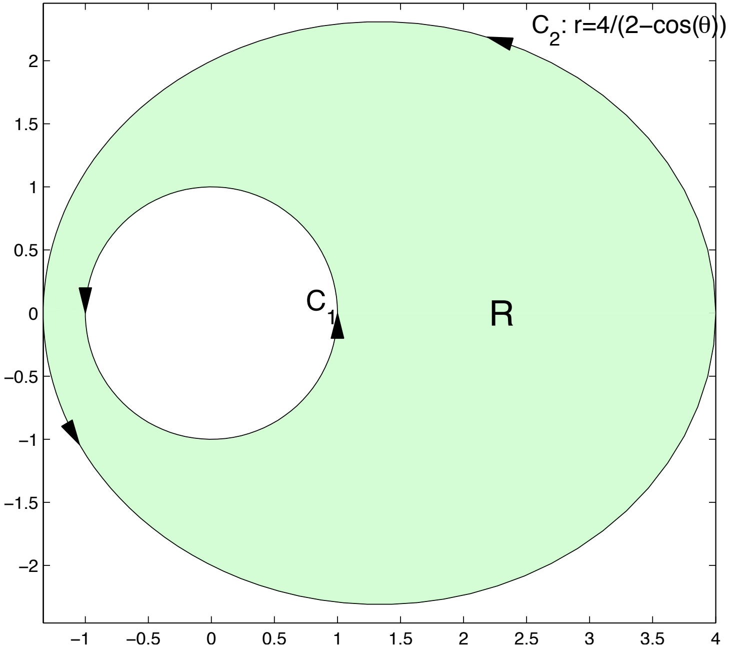
a) Bestem linjeintegralet, henholdsvis dobbeltintegralet

$$\oint_{C_1} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \iint_R \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}A$$

b) Bruk Green's teorem og resultatene i **a)** til å finne verdien av linjeintegralet

$$\oint_{C_2} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$

Figur



Parametrisér med polarkoordinater: $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ for å finne

$$\oint_{C_1} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} = 2\pi$$

Bruk polarkoordinater, $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$,
$0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 1 \leq r \leq 4/(2-\cos\theta)$ for å finne

$$\iint_R \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}A = \frac{23}{32}\pi$$

Nå bruker vi Green's teorem til å konkludere at

$$\oint_{C_2} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} = \oint_{C_1} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} + \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$$

Vi beregner

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}$$

Derfor er

$$\oint_{C_2} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} = 2\pi - 2\,\frac{23}{32}\pi = \frac{9}{16}\pi$$