

Fyll inn studieprogram:

Fyll inn navn:

1.

2.

3.

4.

Viktig informasjon

Besvarelsen kan leveres som gruppearbeid med *maksimalt* 4 personer i en gruppe. Alle deltagerne på gruppen må komme fra *samme studieprogram*. Det er viktig at alle deltagerne fører på navnet sitt over. Skriv tydelig.

Besvarelsen som skal leveres, består av to deler:

- **Oppgavearkene, med utfylte svar der hvor det er angitt.**
- **Utskrifter av utvalgte plot laget i Maple/Matlab.**

Det angis i oppgaveteksten hvilke plot som skal legges ved. Plottene må merkes tydelig ved å skrive på oppgavenummer. (For eksempel merkes plottet til oppgave 1(a) med «1(a)».) Det er lov å legge ved ekstra svarark hvis du trenger mer plass.

NB! Alle arkene må stiftes sammen til slutt!

- 1 **Hensikt:** Få trening i å skrive dobbeltintegraler både i kartesiske koordinater og i polarkoordinater. Bruke Maple/Matlab til å regne ut integralene (eksakt for Maple, numerisk for Matlab) og til å skissere området det integreres over, samt det legemet som dobbeltintegralet gir volumet til.

Maplekommandoer: plot, plot3d, int

Matlabkommandoer: plot, fill, quad2d, quad

Sett

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

og la R være det plane området som ligger til høyre for y -aksen, over linjen $y = x/3 + 2$ og under kurven $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$.

Vi skal regne ut dobbeltintegralet

$$\iint_R f(x, y) dA =,$$

først ved hjelp av x, y -koordinater, så ved å skrive det om til polarkoordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Merk: En del punkter er greiest å regne for hånd (altså uten å bruke Maple/Matlab).

- a) Vis at kurven $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$ (for $|x| \leq 3$) er en del av en sirkel. Skriv ligningen for denne sirkelen på standardformen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2$, der (x_0, y_0) er sirkelens sentrum og c er dens radius:

- b) Finn det punktet i 1. kvadrant der kurven $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$ skjærer linjen $y = x/3 + 2$:

- c) Bruk Maple/Matlab til å tegne området R (dvs. tegn randen som avgrenser R). Legg ved utskrift av plottet.

- d) Skriv $\iint_R f(x, y) dA$ som et iterert dobbeltintegral på formen $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$:

- e) Prøv å regne ut integralet fra forrige punkt med Maple/Matlab.¹ (Hint for Maple: *int*. Hint for Matlab: *quad2d*).

$\iint_R f(x, y) dA \approx$

¹Det viser seg da at Maple ikke greier å regne det ut eksakt (hvis Maple greier det, har du satt opp feil integral). Du kan likevel bruke kommandoen *evalf* på integralet, for å finne en numerisk tilnærming.

- f) Finn uttrykket for sirkelen fra punkt (a) i polarkoordinater, dvs. beskriv den med en ligning på formen $r = h_2(\theta)$:

- g) Finn uttrykket for linjen $y = x/3 + 2$ i polarkoordinater, dvs. beskriv den med en ligning på formen $r = h_1(\theta)$:

- h) Beskriv området R i polarkoordinater. Svaret skal gis på formen $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)$:

- i) Uttrykk $\iint_R f(x, y) dA$ i polarkoordinater:

$$\iint_R f(x, y) dA =$$

Kun for Maple: Bruk Maple til å regne ut dette integralet (Maple skal nå gi et eksakt svar, men siden uttrykket er langt, trenger du ikke skrive det ut her). (Merk: Du kan bruke `evalf` til å sjekke at svaret stemmer med det du fant i punkt (e).)

- j) Dobbelintegralet $\iint_R f(x, y) dA$ er volumet av det romlige legemet som ligger over området R i xy -planet og under grafen $z = f(x, y)$. Bruk Maple/Matlab til å tegne dette legemet. (Eksempelfilen viser hvordan dette gjøres.) Legg ved utskrift av tegningen, merket med 1(j).

- 2 **Hensikt:** Få trening i å sette opp trippelintegraler i xyz -koordinater. Bruke Maple/Matlab til å regne ut integraler og til å skissere området det integreres over.

Maplekommandoer: `plot3d`, `int`

Matlabkommandoer: `surf`, `triplequad`, `dblquad`

La T være legemet i 1. oktant avgrenset av planene $x = 0$, $y = x$ og $z - x = 0$, og av de paraboliske sylindrene $x^2 + y = 2$ og $y^2 + z = 6$.

- a) Skriv $\iiint_T F(x, y, z) dV$ som et iterert trippelintegral på formen

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{k(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx$$

- b) Bruk Maple/Matlab til å tegne området T . Legg ved utskrift av plottet. (Hint til Maple: `plot3d`. Hint til Matlab: `surf`)

- c) Anta at legemet har massetetthet $\delta = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$. Regn ut numeriske approksimasjoner til følgende størrelser ved hjelp av Maple/Matlab (og svaret på punkt (a)). Maple: Se `int` og `evalf`. Matlab: Se `dblquad`.

$Mass \approx$

$M_{y,z} \approx$

$M_{z,x} \approx$

$M_{x,y} \approx$

- d) Finn tyngdepunktet (sentroiden) til T :

$\overline{x}_T \approx$

$\overline{y}_T \approx$

$\overline{z}_T \approx$

- 3 **Hensikt:** Sette opp trippelintegraler i kulekoordinater. Bruke Maple/Matlab til å regne ut integraler og til å skissere området det integreres over.

Maplekommandoer: plot3d, int

Matlabkommandoer: surf, triplequad

La T være legemet i 1. oktant som er

- avgrenset av koordinatplanene,
- ligger innenfor kuleflaten S_1 med radius 3 og sentrum i origo, og
- ligger utenfor kuleflaten S_2 med radius 1 og sentrum på z -aksen i punktet $z = 1$.

- a) Skriv ligningen for S_1 i kulekoordinater, på formen $\rho = f(\theta, \phi)$.

$\rho =$

- b) Skriv ligningen for S_2 i kulekoordinater, på formen $\rho = f(\theta, \phi)$. (Hint: Skriv først opp ligningen for S_2 i xyz -koordinater. Da skal det kunne gå an å forkorte med ρ)

$\rho =$

- c) Beskriv T i kulekoordinater, på formen $a \leq \theta \leq b$, $c \leq \phi \leq d$, $f(\theta, \phi) \leq \rho \leq g(\theta, \phi)$.

- d) Anta at legemet har massetetthet $\delta = 1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 + \rho$. Uttrykk massen M av T som et iterert trippelintegral på formen

$$\int_a^b \int_c^d \int_{f(\theta, \phi)}^{g(\theta, \phi)} \delta \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta,$$

og bruk Maple til å regne ut massen. Matlab-folkene finner et tilnærmet numerisk uttrykk.

$Mass =$

- e) Bruk Maple/Matlab til å tegne området T . (Se eksempelfilen knyttet til denne oppgaven.) Legg ved utskrift av plottet, merket med 3(e).

- 4 **Hensikt:** Bruke Maple/Matlab til å regne ut arbeidet gjort av et vektorfelt langs en kurve i planet, og til å visualisere.

Maplekommandoer: VectorField, PlotVector, SpaceCurve, diff, DotProduct, evalVF, int, Norm

Matlabkommandoer: quiver3, surf, quad

Vi ser på vektorfeltet

$$\mathbf{F} = y \mathbf{i} - x^2 \mathbf{j} + (1 - z) \mathbf{k}$$

og romkurven C parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t) \mathbf{i} + (2 \sin t) \mathbf{j} + (2 \cos 2t) \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- a) Bruk Maple/Matlab til å plote vektorfeltet og kurven hver for seg og sammen.
 b) Bruk Maple/Matlab til å regne ut arbeidet $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$:

$W =$

- c) Bruk Maple til å regne ut lengden av kurven C . Dette er en ikkeelementær funksjon, en elliptisk funksjon, men Maple klarer å håndtere denne. Det kan lønne seg å kjøre kommandoen “combine” på uttrykket for farten, og integrere dette uttrykket. Da sparer du et par minutters arbeidstid for Maple. Bruk evalf på uttrykket for å finne et tilnærmet svar. Matlab-folk beregner kun det tilnærmede svaret numerisk (quad).

Lengden av $C \approx$

(Ekstra plass til å skrive på, om nødvendig.)