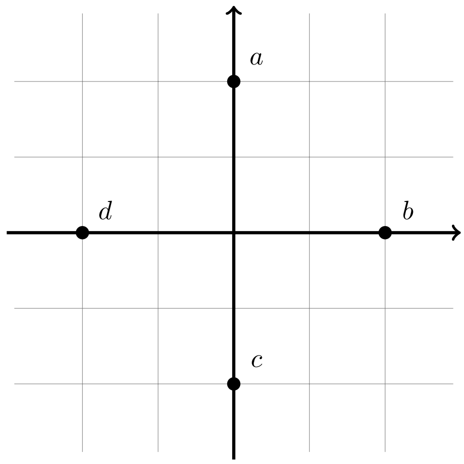
TMA4105 Matematikk 2, øving 1, vår 2012

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Hass, Weir og Thomas*.

Oppgaver fra læreboken



Figur 1: Punktene i oppgave 9.1.3. Hver rute er 1 bred og 1 høy.

9.1.3 Figur 1 viser punktene. Punktene kan også skrives på følgende polarformer for enhver $n \in \mathbb{Z}$:

- a: $(2, \pi/2 + 2n\pi)$ og $(-2, 3\pi/2 + 2n\pi)$
- b: $(2, 2n\pi)$ og $(-2, \pi + 2n\pi)$
- c: $(-2, \pi/2 + 2n\pi)$ og $(2, 3\pi/2 + 2n\pi)$
- d: $(-2, 2n\pi)$ og $(2, \pi + 2n\pi)$

9.1.6 **d)** Da $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ relaterer de to koordinatsystemene har vi at punktet kan skrives

$$\left(-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-1, -1).$$

9.1.19 Siden jeg er i det barmhjertige hjørnet i dag, skal jeg skåne dere for mine forsøk på tegning; se heller bokens tegning i kapittel A-39.

9.1.33 Vi omformer

$$\begin{aligned} r &= \frac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta} \\ r\sin\theta - 2r\cos\theta &= 5 \\ y - 2x &= 5 \\ y &= 2x + 5. \end{aligned}$$

Ligningen beskriver altså en rett linje med stigningstall 2, som skjærer y-asken i $y = 5$.

9.1.57 Ved hjelp av transformasjonen mellom kartesiske og polare koordinater (side 580) finner vi

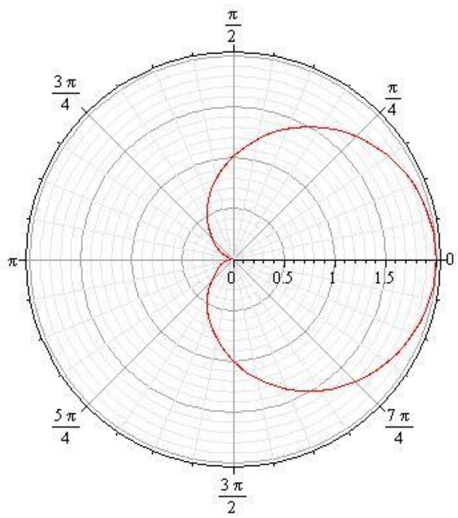
$$r^2 \sin^2 \theta = 4r \cos \theta,$$

så

$$r \sin^2 \theta = 4 \cos \theta.$$

9.2.1 Vi ser at $r(\theta) = r(-\theta)$. Et plot av funksjonen er vist i Figur 2.

Figur 2: Et plot av $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$



9.2.19 Her er

$$r = f(\theta) = \sin 2\theta,$$

så vi kan benytte formelen fra side 583. Vi trenger

$$f'(\theta) = 2 \cos 2\theta.$$

Stigningstallet er da

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta},$$

altså

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)} = \frac{2 \cos(2\theta) \sin \theta + \sin(2\theta) \cos \theta}{2 \cos(2\theta) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta}.$$

For de aktuelle punktene får vi da

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,\pi/4)} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4}}{2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(-1,-\pi/4)} = 1 \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(-1,3\pi/4)} = 1 \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,-3\pi/4)} = -1.$$

Hva tegningen angår, anbefaler jeg en titt på side A-39 i læreboken.

9.2.21 **b)** Se bokens fasit-tegning.

9.2.25 Se bokens tegning på side A-39.

9.3.13 Sirklene skjærer hverandre når $\cos\theta = -1/2$, altså i vinklene

$$\theta_1 = \pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) \qquad \text{og} \qquad \theta_2 = \pi\left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

Andre formel på side 587 gir arealet

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left((-2\cos\theta)^2 - 1\right)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(4\cos^2\theta - 1\right)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) + 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Siste ledd regnes ut:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\left[\sin\theta\cos\theta + \theta\right]_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

9.3.15 **a)** Vi kan forenkle utregningen noe ved å dele opp arealet litt. La A_1 være arealet i figuren for $0 \le \theta \le \pi/4$, og observér at dette arealet er det samme som for $3\pi/4 \le \theta \le \pi$. Det gjenværende området er da en trekant med grunnlinje $2\cos\pi/4$ og høyde $\sin\pi/4$. Dens areal er dermed

$$A_2 = \frac{2}{2}\cos\pi/4 \cdot \sin\pi/4 = \frac{1}{2}.$$

Arealet A_1 regner vi ut som før, nemlig

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\tan\theta - \theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Altså er

$$A = 2A_1 + A_2 = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

b) x-koordinaten til et punkt (r,θ) på polarkoordinatkurven $r = \tan\theta$ er gitt ved $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta = \tan\theta\cos\theta = \sin\theta$. Når $\theta \to \pi/2$, går $\tan\theta$ mot uendelig, mens $x(\theta) = \sin\theta$ går mot 1. Dette forklarer asymptotene.

9.3.16 Formelen for arealet brukt i oppgaven er fra det andre resultatet på side 587. Dette resultatet antar at det aktuelle området er såkalt "vifteformet" ("fan shaped"). Området i oppgaven er *ikke* vifteformet; se for eksempel på fortegnet til r når $\pi/2 \le \theta \le 3\pi/2$.

Av eksempel 9.3.1 ser vi at kardioiden vår innelslutter et areal på $6\pi/4$ (vi har $r = 1 + \cos\theta$ istedet for $r = 2 + 2\cos\theta$ som i eksempelet). Arealet innesluttet av sirkelen vår, som har radius $1/2$, er $\pi/4$. Dermed er det etterspurte arealet $6\pi/4 - \pi/4 = 5\pi/4$.

9.3.24 Med $r = \sqrt{1+\sin 2\theta}$ finner vi

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin 2\theta}} 2\cos 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1+\sin 2\theta}}.$$

Formelen nederst på side 588 gir så

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi\sqrt{2}} \sqrt{1+\sin 2\theta + \frac{\cos^2 2\theta}{1+\sin 2\theta}}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(1+\sin 2\theta)^2 + \cos^2 2\theta}{1+\sin 2\theta}}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+2\sin 2\theta + \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta}{1+\sin 2\theta}}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2(1+\sin 2\theta)}{1+\sin 2\theta}}\, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi\sqrt{2}} \sqrt{2}\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Eksamensoppgaver

Ligger på hjemmesiden under "Gamle eksamensoppgaver".

Andre oppgaver

egen La $r(\theta) = 1$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Da vil kurven være en sirkel med radius 1, og dermed vil buelengden være 2π. Vi benytter formelen på side 588. Vi har at $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 0$, og dermed

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1^2 + 0^2}\, \mathrm{d}\theta = 2\pi. \tag{1}$$