TMA4105 Matematikk 2, øving 10, vår 2013

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

En vektor boken skriver som $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, vil vi ofte skrive som (a, b, c), og tilsvarende i to dimensjoner.

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgaver fra læreboken

13.6.11 Skjæringspunktene mellom $x = -y$ og $x = y - y^2$ har y-koordinater gitt ved

$$-y = y - y^2, \quad \text{det vil si,} \quad y^2 - 2y = 0, \quad \text{altså} \quad y = 0 \text{ og } y = 2.$$

Avstanden (uten fortegn) mellom et punkt (x, y) og x-aksen er $|y|$. Treghetsmomentet for R med hensyn på x-aksen er derfor

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_R y^2 \cdot \delta(x,y)\ \mathrm{d}A = \int_{y=0}^{2} \int_{x=-y}^{y-y^2} y^2(x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{2} \left[y^2\,\frac{x^2}{2} + y^3 x \right]_{x=-y}^{y-y^2} \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{2} \left(y^2\,\frac{(y-y^2)^2}{2} + y^3(y-y^2) - y^2\,\frac{y^2}{2} + y^4 \right) \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{2} \left(-2y^5 + \frac{y^6}{2} + 2y^4 \right) \mathrm{d}y \\
&= \left[-2\frac{y^6}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{y^7}{7} + 2\,\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = -\frac{64}{3} + \frac{64}{7} + \frac{65}{5} = \frac{64}{105}.
\end{aligned}$$

13.7.1 Vi har

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} \mathrm{d}z\, r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{2-r^2} - r) r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\ \mathrm{d}r - \int_0^1 r^2\ \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \left(\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\ \mathrm{d}r - \frac{1}{3} \right).
\end{aligned}$$

Det siste integralet beregnes ved substitusjonen $u = 2 - r^2$, slik at vi får

$$\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

som endelig resultat.

13.7.33 Det er klart at begge legemene er rotasjonssymmetrisk om z-aksen, så θ løper fra 0 til 2π. Siden φ er vinkelen ut fra z-aksen, gir begrensningen $z \geq 0$ at φ løper fra 0 til $\pi/2$. Dermed har vi volumet

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\cos\varphi}^{2} \rho^2 \sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (2^3 - \cos^3\varphi) \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} (2^3 - \cos^3\varphi) \sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(8 - \frac{1}{4} \right) = \frac{31}{6}\pi.
\end{aligned}$$

13.8.17 Vi husker at kulekoordinater (ρ, φ, θ) er relatert til kartesiske koordinater (x, y, z) ved

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \cos\varphi.$$

De forskjellige partiellderiverte er

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x}{\partial \rho} = \sin\varphi\cos\theta & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi\cos\theta & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\sin\varphi\sin\theta \\
\dfrac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi\sin\theta & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi\sin\theta & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\sin\varphi\cos\theta \\
\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\varphi & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = 0,
\end{array}$$

så Jacobideterminanten er

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \\
&= \sin\varphi\cos\theta\left(\rho\cos\varphi\sin\theta\cdot 0 + \rho^2\sin^2\varphi\cos\theta\right) \\
&\quad - \rho\cos\varphi\cos\theta\left(\sin\varphi\sin\theta\cdot 0 - \rho\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\right) \\
&\quad - \rho\sin\varphi\sin\theta\left(-\rho\sin^2\varphi\sin\theta - \rho\cos^2\varphi\sin\theta\right) \\
&= \rho^2\sin\varphi\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta\right) \\
&= \rho^2\sin\varphi\left(\sin^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right) \\
&= \rho^2\sin\varphi\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \\
&= \rho^2\sin\varphi,
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

13.8.18 Anta at vi har det endimensjonale integralet

$$\int_R f(x)\,\mathrm{d}x$$

for en eller annen integrerbar funksjon $f : R \to \mathbb{R}$ og at $g : G \to R$ uttrykker en substitusjon. Her er $G \subseteq \mathbb{R}$, så den eneste partiellderiverte til g er simpelthen den ordinære dererverte. Dermed er Jacobideterminanten for denne substitusjonen rett og slett

$$J(u) = \left|g'(u)\right| = g'(u).$$

(Merk at det midterste uttrykket her er en 1×1-*determinant*, ikke en absoluttverdi, så siste likhet er korrekt!) Dermed er

$$\int_R f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(R)} f(g(u))|J(u)|\,\mathrm{d}u = \int_G f(g(u))|g'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Forvirret? Vi tar et konkret, enkelt eksempel. La oss si at vi skal beregne

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x,$$

og at vi aldri har lært substitusjon i Matematikk 1. Her er nå $f = \sin$ og $R = [0, \pi/2]$. Vi gjør substitusjonen $u = 2x$, så $g(u) = u/2$ og $G = [0, \pi]$. Siden

$$g'(u) = \frac{1}{2}$$

er Jacobideterminanten også $J(u) = 1/2$. Da gir resultatet vårt

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \int_R \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \int_G \sin\left(\frac{2u}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u,$$

som er resultatet vi kjenner fra envariabelteori.

Selv om denne oppgaven virker veldig enkel, illustrerer den (og den foregående oppgaven) noe veldig viktig: Koordinatbytter/substitusjon beskrives *fullstendig* av teorien i avsnitt 13.8. Alt du lærte om substitusjon i Matematikk 1 er dekket, samt substitusjon til populære koordinatsystemer som polar-, kule- og sylinder-koordinater. Teorien gjelder også for funksjoner av n variabler. . . .

13.8.20 (Oppgaven mener egentlig at vi skal finne volumet *inneholdt* i ellipsoiden. Ellipsoider er flater, og har således ikke volum.)

Vi setter

$$x = au \qquad\qquad y = bv \qquad\qquad z = cw. \tag{1}$$

Ligningen for ellipsoiden E er i disse koordinatene $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, altså enhetskuleskallet. Vi har altså valgt nye koordinater, (u, v, w), hvor ellipsoiden vår er transformert til et kuleskall. Volumet inneholdt i enhetskuleskallet, altså volumet av enhetsballen B, er som kjent

$$V_B = \iiint_B \mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi.$$

Jacobideterminanten for koordinattransformasjonen i ligning (1) er

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Hvis vi kaller området innenfor ellipsoiden E for C, så er volumet vi er ute etter

$$V = \iiint_C \mathrm{d}V = \iiint_B |J| \,\mathrm{d}V = abc \iiint_B \mathrm{d}V = abcV_B = \frac{4}{3}abc\pi.$$

13.8.22 Vi har i de tidligere oppgavene sett substitusjoner flere ganger. I denne oppgaven vil vi bruke en litt annen, og i mine øyne ryddigere, notasjon. Gjør gjerne denne oppgaven med samme notasjon som de foregående, om du ønsker det.

Vi skal beregne

$$\iiint_D f(x, y, z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$

hvor $f : D \to \mathbb{R}$ er definert ved $f(x, y, z) = x^2y + 3xyz$ på $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Transformasjonen i oppgaven kan skrives som en funksjon $g : G \to D$ hvor

$$g(u, v, w) = \left(u, \frac{v}{u}, \frac{w}{3}\right)$$

og

$$G = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2, \quad 0 \le w \le 3\}.$$

G er med andre ord rektangulær, så integrasjon over G involverer hyggelige grenser. De partiellderiverte til de tre komponentene til g er

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial}{\partial u}u = 1 & \dfrac{\partial}{\partial v}u = 0 & \dfrac{\partial}{\partial w}u = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{v}{u} = -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{v}{u} = \dfrac{1}{u} & \dfrac{\partial}{\partial w}\dfrac{v}{u} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{w}{3} = 0 & \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{w}{3} = 0 & \dfrac{\partial}{\partial w}\dfrac{w}{3} = \dfrac{1}{3} \end{array},$$

så Jacobideterminanten er

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3u}.$$

Dermed er

$$
\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iiint_G f(g(u,v,w))\cdot|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \iiint_G f\left(u,\frac{v}{u},\frac{w}{3}\right)\frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \iiint_G \left(u^2\frac{v}{u}+3u\frac{v}{u}\frac{w}{3}\right)\frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{3}\iiint_G \left(v+\frac{vw}{u}\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\int_0^3\int_0^2\int_1^2 \left(v+\frac{vw}{u}\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3\int_0^2\int_1^2 v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \frac{1}{3}\int_0^3\int_0^2\int_1^2 \frac{vw}{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \mathrm{d}w\int_0^2 v\,\mathrm{d}v\int_1^2 \mathrm{d}u + \frac{1}{3}\int_0^3 w\,\mathrm{d}w\int_0^2 v\,\mathrm{d}v\int_1^2\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}(3-0)\frac{2^2-0^2}{2}(2-1)+\frac{1}{3}\frac{3^2-0^2}{2}\frac{2^2-0^2}{2}(\ln 2-\ln 1) \\
&= 2+3\ln 2.
\end{aligned}
$$

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en på `https://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2013v/gml_eks`.

Maple-oppgaver

Forslag til konkret Maple-kode finnes på `http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4105/2013v/felles/lf/10/lf10-maple.pdf` og `http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4105/2013v/felles/lf/10/lf10-maple.mw`.