TMA4105 Matematikk 2, øving 11, vår 2013

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgaver fra læreboken

14.1.1 Rett linje, beveger seg positivt i x-retning, negativt i y-retning, og rører seg ikke i z-retning: **c**.

14.1.2 Rett linje, ingen bevegelse i x- eller y-retning, fra -1 til 1 i z-retning. **e**.

14.1.3 Sirkulær bevegelse i xy-planet, ingen bevegelse i z-retning: **g**.

14.1.4 Rett linje, ingen bevegelse i y- eller z-retning. **a**.

14.1.5 Rett linje, positiv bevegelse i alle retninger: **d**.

14.1.6 Rett linje, ingen bevegelse i x-retning. Negativ i z-retning og positiv i y-retning. **b**.

14.1.7 Ingen bevegelse i x-retning, parabel i zy-planet: **f**.

14.1.8 Halvsirkel med radius 2, ingen bevegelse i y-retning. **h**.

14.1.15 Linearitet av integralet gir

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_{C_1} f \, \mathrm{d}s + \int_{C_2} f \, \mathrm{d}s.$$

Vi beregner integralene:

$$\int_{C_1} f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\mathbf{r}_1(t))|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1(t)}{\mathrm{d}t}| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 2t\sqrt{1+(2t)^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right),$$
$$\int_{C_2} f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\mathbf{r}_2(t))|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2(t)}{\mathrm{d}t}| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (2-t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{5}{3}.$$

Det totale integralet er altså $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}+9\right)$.

14.1.16 Linearitet av integralet gir

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_{C_1} f \, \mathrm{d}s + \int_{C_2} f \, \mathrm{d}s + \int_{C_3} f \, \mathrm{d}s.$$

Parametriseringene av kurvene har fartsfunksjoner som alle er konstant lik 1. Vi beregner integralene:

$$\int_{C_1} f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\mathbf{r}_1(t)) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 -t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{-1}{3}$$
$$\int_{C_2} f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\mathbf{r}_2(t)) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (\sqrt{t}-1^2) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}-1$$
$$\int_{C_3} f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\mathbf{r}_3(t)) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (t+\sqrt{1}-1^2) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Det totale integralet er altså $-1/6$.

14.1.32 Først beregner vi massen

$$M = \int_0^2 \delta(t)|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{1}{1+t}\sqrt{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t = 2.$$

Neste steg er å beregne moment om koordinatplanene,

$$M_{yz} = \int_0^2 t\delta(t)|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t = \int_0^2 t\frac{1}{1+t}\sqrt{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t = 2,$$
$$M_{xz} = \int_0^2 \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\delta(t)|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}t = \frac{32}{15},$$
$$M_{yz} = \int_0^2 \frac{t^2}{2}\delta(t)|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{t^2}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{4}{3}.$$

Dette gir $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = \frac{16}{15}$ og $\bar{z} = \frac{2}{3}$. Vi finner treghetsmomentene om aksene og bruker i alle beregninger at $\delta(t)|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}| = 1$,

$$I_x = \int_0^2 (\frac{8}{9}t^3 + \frac{1}{4}t^4)\ \mathrm{d}t = \frac{32}{9} + \frac{32}{20} = \frac{232}{45},$$
$$I_y = \int_0^2 (\frac{1}{4}t^4 + t^2)\ \mathrm{d}t = \frac{32}{20} + \frac{8}{3} = \frac{64}{15},$$
$$I_z = \int_0^2 (\frac{8}{9}t^3 + t^2)\ \mathrm{d}t = \frac{32}{9} + \frac{8}{3} = \frac{56}{9}.$$

14.2.5 Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} - \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j}$$

peker mot origo, og $|\mathbf{F}(x,y)| = \frac{1}{x^2+y^2}$.

14.2.6 Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} \tag{1}$$

løser oppgaven. Dette ser vi ved at $\mathbf{F}(x,y)\cdot(x,y) = 0$.

14.2.11 a. Vi har $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, som gir

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ \mathrm{d}s = \int_0^1 \left(3t^2 - 3t + 3t + 1\right)\ \mathrm{d}t = 2.$$

b. Vi har at $\mathbf{v}(t) = 1\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$ som gir

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ \mathrm{d}s = \int_0^1 \left(3t^2 - 3t + 6t^5\right)\ \mathrm{d}t = \frac{3}{2}.$$

c. Vi regner C_3 og C_4 hver for seg. For C_3 gjelder $r(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, 0 \le t \le 1$. Det gir

$$W_3 = \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ \mathrm{d}s = \int_0^1 \left(3t^2 - 3t\right)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

For C_4 gjelder

$$W_4 = \int_{C_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ \mathrm{d}s = \int_0^1 1\ \mathrm{d}t = 1.$$

Totalt får vi $W = \frac{1}{2}$.

14.2.23 a) Vi har

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t) \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t).$$

Merk at $\mathbf{F}_1 = \mathbf{r}$ og $\mathbf{F}_2 = \mathbf{T}$. Vi får sirkulasjonene

$$\Gamma_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{T}\, \mathrm{d}t = 0$$
$$\Gamma_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{T}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Fluksene er

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\, \mathrm{d}t = 2\pi$$
$$\Phi_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}t = 0.$$

b) Vi har

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, 4\cos t) \qquad \mathbf{n}(t) = (4\cos t, \sin t).$$

Merk at $\mathbf{F}_1 = \mathbf{r}$. Vi får sirkulasjonene

$$\Gamma_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{T}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 15 \sin t \cos t\, \mathrm{d}t = 0$$
$$\Gamma_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{T}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (-4\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, 4\cos t)\, \mathrm{d}t = 8\pi.$$

Fluksene er

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + 4\sin^2 t)\, \mathrm{d}t = 8\pi$$
$$\Phi_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}t = 0.$$

14.2.27 Vi regner C_1 og C_2 hver for seg. Vi beregner flytintegralene først

$$W_1 = \int_0^{\pi} (-a \sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j}) \cdot (-a \sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j})\, \mathrm{d}t = a^2\pi,$$
$$W_2 = \int_{-a}^{a} (t\mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i})\, \mathrm{d}t = 0.$$

Det vil si at den totale flyten er $W = a^2\pi$. Enhetsnormalvektor på kurven beskrevet av $\mathbf{r}_1$ er $\mathbf{n}_1(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j}$, mens enhetsnormalvektor på kurven beskrevet av $\mathbf{r}_2$ er $\mathbf{n}_2(t) = -1\mathbf{j}$. Dette gir fluks

$$\Phi_1 = \int_0^{\pi} (-a \sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j}) \cdot (a \cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j})\, \mathrm{d}t = 0,$$
$$\Phi_2 = \int_{-a}^{a} t\mathbf{j} \cdot (-1)\mathbf{j}\, \mathrm{d}t = 0$$

Det gir at den totale fluksen gjennom kurven er $\Phi = 0$.

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en på `http://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2012v/gml_eks`. Der er kommet forespørsler som at disse legges ved i selve løsningsforslagene, men dessverre er ofte de gamle LaTeX-filene gått tapt.