TMA4105 Matematikk 2, øving 12, vår 2012

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

En vektor boken skriver som $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, vil vi skrive som (a, b, c), og tilsvarende i to dimensjoner.

Hvis ikke annet spesifiseres, betyr $\mathbf{v}_i$ den i'te komponenten av en vektor $\mathbf{v}$.

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgaver fra læreboken

14.3.9 Ved en rask sjekk ser man at vektorfeltet er konservativt. Da kan vi finne potensialfunksjonen f. $\nabla f = \mathbf{F}$ gir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{y+2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^{y+2z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xe^{y+2z}$$

som gir at $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + g(y,z)$ ved å integrere første likning med hensyn på x. Derivasjon med hensyn på y gir $xe^{y+2z} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = xe^{y+2z}$, som gir at g er en funksjon av kun z. Ved å derivere f med hensyn til z får man på tilsvarende måte at $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + C$, der C er en konstant.

14.4.17 Ved Greens teorem får man

$$\oint_C y^2 dx + x^2 \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2(x-y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 0.$$

14.4.33 Sett $\mathbf{F} = \nabla f$. Da gir Greens teorem

$$\oint_C \left(\frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}x \right) = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}\sigma = \iint_R \nabla^2 f \, \mathrm{d}\sigma.$$

Siste integral er 0 da f oppfyller Laplaces ligning ($\nabla^2 f = 0$).

14.5.17 Planet kan parametriseres av $\mathbf{r} : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{r}(s,t) = \left(s\cos t, s\sin t, 1 - \frac{s}{2} \sin t \right)$$

(altså ved bruk av polarkoordinater[1]). Området vi er interessert i er begrenset av $(\mathbf{r}_1(s,t))^2 + (\mathbf{r}_2(s,t))^2 \leq 1$, altså simpelthen av $s \leq 1$.

Vi trenger videre

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) = \left(\cos t, \sin t, -\frac{1}{2} \sin t \right) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) = \left(-s\sin t, s\cos t, -\frac{s}{2} \cos t \right),$$

samt

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos t & \sin t & -\frac{1}{2}\sin t \\ -s\sin t & s\cos t & -\frac{s}{2}\cos t \end{pmatrix} \right| = \left| \left(0, \frac{s}{2}, s \right) \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} s.$$

[1] s og t spiller rollen til henholdsvis r og θ i "vanlig" notasjon. Grunnen til byttet er at vi ikke skal forvirre r med $\mathbf{r}$.

Arealet vi søker er derfor

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} s \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s$$
$$= \sqrt{5}\pi \int_0^1 s \, \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi.$$

(PS: Som boken påpeker, har en mange (like riktige) valg når det gjelder parametrisering av området. Selv om det altså finnes mange riktige valg, er ikke nødvendigvis alle like gode fra et regneteknisk ståsted. I valget jeg gjorde over har vi benyttet både symmetrien i området, og at flaten vi integrerer over faktisk er grafen til en funksjon – begge deler forenkler utregningen sammenlignet med en del andre valg).

14.5.43 Denne oppgaven er lik 14.5.17 bortsett fra at her er

$$\mathbf{r}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, cs\cos t).$$

Da finner man ut at

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) \right| = s\sqrt{c^2+1}$$

så svaret blir $\sqrt{c^2+1}\pi$.

14.6.21 Vi bruker parametriseringen

$$\mathbf{r}(s,t) = (s\cos t, s\sin t, s)$$

(altså ved bruk av polarkoordinater[2]).

Da finner man at

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}(s,t) = (-s\cos t, -s\sin t, s).$$

For at normalvektoren skal peke ut, må man her gange vektoren med -1, og da får man

$$\mathbf{n}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, -1).$$

Siden $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(s^2 \sin t \cos^2 t + s)$, har man at fluksen er

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}(s^2 \sin t \cos^2 t + s)\sqrt{2}s \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3}.$$

14.6.33 La oss kalle fluksen ut av den parabolske sylinderen for Φ_1, ut av $x = 0$-planet for Φ_2, ut av $x = 1$-planet for Φ_3, og ut av $z = 0$-planet for Φ_4. Siden fluksen simpelthen er et flateintegral, og disse er lineære, kan vi dele opp beregningen i fire deler; vi søker altså $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$.

Den parabolske sylinderen kan parametriseres ved $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 4 - y^2)$. Med interesseområde som i oppgaven er definisjonsmengden $[0,1] \times [-2,2]$ (ses ved å finne skjæringene mellom flatene som definerer området). Vi har

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x,y) = (1,0,0) \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x,y) = (0,1,-2y),$$

[2] s og t spiller rollen til henholdsvis r og θ i “vanlig” notasjon. Grunnen til byttet er at vi ikke skal forvirre r med $\mathbf{r}$.

samt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x,y) = (0, 2y, 1)$$
$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x,y)\right| = \sqrt{4y^2+1}.$$

En enhetsnormal pekende ut av den parabolske sylinderen er derfor

$$\mathbf{n}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}(0, 2y, 1).$$

Vi behøver komponenten av $\mathbf{F}$ langs $\mathbf{n}$, altså

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \mathbf{n}(x,y) = \frac{2xy - 3(4-y^2)}{\sqrt{4y^2+1}}.$$

Fluksen til $\mathbf{F}$ ut av den parabolske sylinderen i området vi er interessert i er derfor[3]

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \int_{-2}^{2}\int_0^1 \frac{2xy - 3(4-y^2)}{\sqrt{4y^2+1}}\sqrt{4y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2}\int_0^1 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 12\int_{-2}^{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 3\int_{-2}^{2}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2} y\,\mathrm{d}y - 48 + 3\int_{-2}^{2} y^2\,\mathrm{d}y \\
&= -48 + 16 = -32.
\end{aligned}$$

Vi må også beregne fluksen ut av de resterende flateene som definerer flaten vår, men dette er mye enklere. Først kan vi observere at normalvektoren til $x = 0$-flaten er $-\mathbf{i}$, mens den i $x = 1$-flaten er $\mathbf{i}$. Dermed vil integrandene i fluksintegralene for disse to flatene være like, bare med motsatt fortegn, så $\Phi_2 = -\Phi_3$. Det siste flateintegralet har normalvektor $-\mathbf{k}$, så her bidrar bare $\mathbf{k}$-komponenten til $\mathbf{F}(x, y, 0)$, som er 0. Så $\Phi_4 = 0$.

Altså er $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_2 + 0 = \Phi_1 = -32$.

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en på `http://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2012v/gml_eks`. Der er kommet forespørsler som at disse legges ved i selve løsningsforslagene, men dessverre er ofte de gamle LaTeX-filene gått tapt.

[3] Observér at lengden til $\mathbf{n}(x,y)$ kansellerer mot faktoren $\sqrt{4y^2+1}$ i integrasjonsmålet. Dette vil alltid skje i slike integraler (sammenlign parametriseringsuttrykkene med de flateintegralene vi så på tidligere i kurset), og holder en tungen rett i munnen er det altså ikke nødvendig å operere med enhetsnormalvektorer her.