TMA4105 Matematikk 2, øving 13, vår 2013

Løsningsforslag

Diverse oppgaver

1 Fiksér et hvilket som helst punkt $\mathbf{p}_0 \in S$.

Siden ∇f er et gradientvektorfelt, og dermed konservativt, forteller fundamentalteoremet for kurveintegraler (teorem 1 på side 870) oss at

$$f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}_0) = \int_C \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{1}$$

for en hvilken som helst glatt parametrisering $\mathbf{r}$ av en hvilken som helst glatt kurve C fra $\mathbf{p}_0$ til en hvilken som helst $\mathbf{p} \in S$. Vi står fritt til å velge C under disse betingelsene, så velg den til å være en glatt kurve som *ligger i flaten* S. Hvis $\mathbf{r}$ er en parametrisering av en slik C, må hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t)$ ligge i tangentplanet til S i $\mathbf{r}(t)$ for enhver t. Oppgaveteksten forteller oss at ∇f står normalt på S. Derfor står den også normalt på $\mathbf{r}'(t)$ for alle t. Følgelig er integranden i ligning (1) null, så

$$f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}_0)$$

for alle $\mathbf{p} \in S$, som var det vi skulle vise.

2 **a)** La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (xf(x, y), yf(x, y))$. Funksjonen $\mathbf{r} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ parametriserer C ved

$$\mathbf{r}(t) = R \cdot (\cos t, \sin t).$$

Siden $\mathbf{r}'(t) = R \cdot (-\sin t, \cos t)$, er

$$\begin{aligned}
\oint_C (xf(x, y)\ \mathrm{d}x + yf(x, y)\ \mathrm{d}y) &= R \int_0^{2\pi} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= R \int_0^{2\pi} (-f(\mathbf{r}(t)) \sin t \cos t + f(\mathbf{r}(t)) \cos t \sin t)\ \mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) Tredjekomponenten til $\operatorname{curl} \mathbf{F}(x, y)$ er

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Stokes (eller Greens, side 881, om du vil) teorem gir derfor at

$$\oint_C (xf(x, y)\ \mathrm{d}x + yf(x, y)\ \mathrm{d}y) = \iint_D \left(y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \tag{2}$$

hvor D er området innenfor C. Dersom det fantes en funksjon f slik at integranden på høyre side i ligning (2) var strengt større enn null overalt, ville integralet blitt strengt større enn null. I deloppgave **a)** viste vi at integralet er null, så en slik funksjon kan ikke eksistere.

3 **a)** La $\mathbf{r} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ være parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ av C. Hvis $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ er definert ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \right),$$

er integralet vi skal beregne

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2}(-\sin t) + \frac{\cos t}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2} \cos t \right)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t \right)\ \mathrm{d}t = 2\pi.
\end{aligned}$$

b) Integranden er simpelthen $1/r^4$ i polarkoordinater. Vi utfører derfor integralet i polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_1^{4/(2-\cos\theta)} \frac{1}{r^4} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_1^{4/(2-\cos\theta)} \frac{1}{r^3}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{(2-\cos\theta)^2}{4^2}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \pi - \frac{1}{32}\int_0^{2\pi}(4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi - \frac{1}{32}(8\pi + \pi) = \frac{23}{32}\pi.
\end{aligned}$$

c) Tredjekomponenten til curlen til $\mathbf{F}$ fra deloppgave **a)** er

$$\begin{aligned}
\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y)\cdot\mathbf{k} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2)^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{(x^2+y^2)^2 - x\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} + \frac{(x^2+y^2)^2 - y\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4x^2+4y^2}{(x^2+y^2)^3} \\
&= -\frac{2}{(x^2+y^2)^2} = -2\cdot(\text{integranden fra deloppgave } \mathbf{b})).
\end{aligned}$$

Siden $\partial R = D \cup C'$, hvor C' er C med motsatt orientering, gir Stokes teorem

$$\oint_{\partial R}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_D \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \oint_{C'}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_D \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} - \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}A.$$

Det siste integralet er -2 ganger integralet fra deloppgave **b)**, altså $-23\pi/16$. Sammen med resultatet $\oint_C \mathbf{F} = 2\pi$ fra deloppgave **a)** gir dette

$$\oint_D \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \iint_R \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}A = 2\pi - \frac{23}{16}\pi = \frac{9}{16}\pi.$$

4 **a)** I polarkoordinater er paraboloiden gitt av $z = 4r^2$. Innsatt ligningen for planet, $z = 4$, får vi at paraboloiden skjærer planet når $r = 1$. Derfor er volumet til T

$$\operatorname{vol}(T) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{4r^2}^4 r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 8\pi\int_0^1 (r - r^3)\,\mathrm{d}r = 8\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi.$$

Divergensteoremet gir at

$$\iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial T}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

La P betegne delen av planet $z = 4$ som tilfredsstiller $r \le 1$ i sylinderkoordinater, med orientering slik at normalen peker *ut av* T. Siden $\partial T = S \cup P$, gir additivitet av integraler at

$$I_1 = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{\partial T}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma - \iint_P \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V - \iint_P \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

La oss først se på det siste integralet. På P er $\mathbf{n}$ konstant lik $\mathbf{k}$. Dermed er $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ her konstant lik 1, og det siste integralet er derfor arealet til en sirkelskive med radius 1, altså π.
Videre er $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 1/4$, så

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{4}\iiint_V \mathrm{d}V = \frac{1}{4}\operatorname{vol}(T) = \frac{\pi}{2}.$$

Dermed er

$$I_1 = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}V - \iint_P \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\sigma = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

For I_2 vil vi trenger curlen til $\mathbf{F}$, som er

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{yz}{8\pi} & -\frac{x}{2\pi} & \frac{z}{4} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{y}{8\pi}, -\frac{1}{2\pi} - \frac{z}{8\pi}\right).$$

Merk at $\partial S = C$, hvor C er sirkelen gitt av $r = 1$ og $z = 4$ med orientering *med klokken* sett "ovenfra" (altså sett mot origo). La P' betegne P med motsatt orientering, altså med normalvektor $-\mathbf{k}$. Da er også $\partial P' = C$. Derfor gir Stokes' teorem

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\sigma = \int_C \mathbf{F} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{P'} = \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{F}(r\cos\theta, r\sin\theta, 4) \cdot (-\mathbf{k}) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\ &= 2 \int_0^1 r \, \mathrm{d}r = 1. \end{aligned}$$

(Hvordan oppstod integrasjonsgrensene? Disse er de samme som for P. Som område er P det samme som P' – kun orienteringen er forskjellig, så $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$, og utover det integrerer vi fortsatt over en sirkelskrive med radius 1 plassert i $z = 4$).

b) Alle størrelsene det spørres etter må være som i deloppgave **a)**. Vi har jo bare "tippet rommet over på siden"! Alle beregningene ville vært helt lik dem i deloppgave **a)**, bare med alternative sylinderkoordinater hvor den radielle og angulære koordinat håndterer yz-planet, og "høydekoordinaten" håndterer x-aksen.

Å regne i slike alternative koordinatssystemer kan være god trening, så jeg vil anbefale alle å gjøre utregningene fullstendig. Svarene blir dog akkurat de samme.

Ekstraoppgaver for de spesielt interesserte

1 Integrerer vi begge sider av

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

over området D innenfor S får vi

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{E} \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_D \rho \, \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

hvor siste overgang er per definisjon av (ladnings-, masse-, ...-)tetthet. Divergensteoremet gir så at

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{E} \, \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

som var det vi skulle vise.

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en på `http://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2012v/gml_eks`. Der er kommet forespørsler som at disse legges ved i selve løsningsforslagene, men dessverre er ofte de gamle LaTeX-filene gått tapt.