Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 2

Alle oppgavene er fra læreboka.

Merk: I løsningene til alle oppgavene fra seksjon 9.4 betegner c avstand fra sentrum til brennpunkt for det aktuelle kjeglesnitt. a og b betegner de relevante parametrene for kjeglesnittet, slik angitt i boksene i boken.

1 *Oppgave 9.4.22.* For å få $9x^2 + 10y^2 = 90$ over på normalform, deler vi begge sider på 90, som gir

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Store halvakse er $a = \sqrt{10}$ og lille halvakse er $b = \sqrt{9} = 3$. Videre er $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, så brennpunktene ligger i $(\pm 1, 0)$.

2 *Oppgave 9.4.31.* Vi skriver om til standardform, og finner

$$\begin{aligned} 8x^2 - 2y^2 &= 16 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} &= 1. \end{aligned}$$

Da er $c = \sqrt{2+8} = \sqrt{10}$, slik at brennpunktene blir $(\pm\sqrt{10}, 0)$ mens skjæringspunktene blir $(\pm\sqrt{2}, 0)$. Asymptotene er gitt ved

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}x = \pm 2x.$$

For skisse, se fasit bakerst i boken.

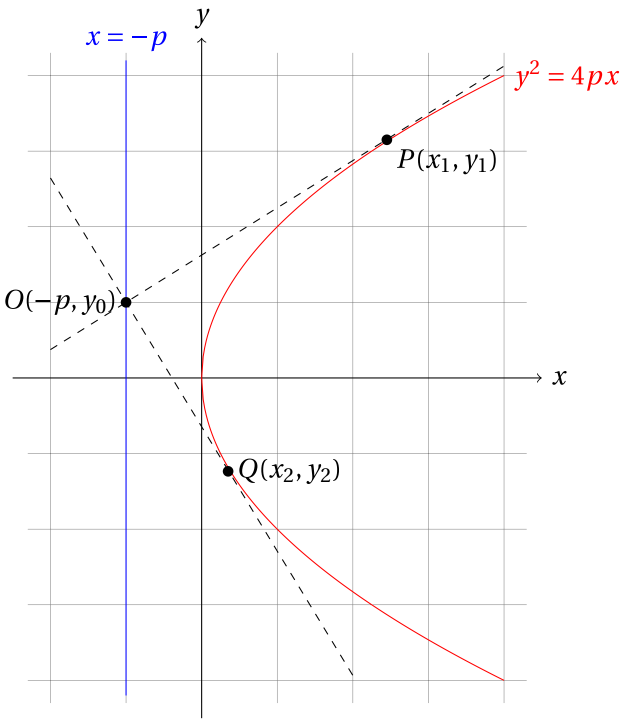
3 *Oppgave 9.4.63.* Vi kompletterer to kvadrater for å bringe uttrykket på standardform:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 2x - 4y &= -1 \\ (x-1)^2 - 1 + 2(y-1)^2 - 2 &= -1 \\ \frac{(x-1)^2}{2} + (y-1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Slik blir $c = \sqrt{2-1} = 1$. Siden referansesystemet er forskjøvet 1 til høyre og 1 oppover er brennpunktene gitt av $(\pm c, 0) + (1, 1)$, altså $(2, 1)$ og $(0, 1)$. Skjæringspunktene blir likeledes $(\pm a, 0) + (1, 1) = (\pm\sqrt{2} + 1, 1)$.

$\boxed{4}$ *Oppgave 9.4.76.*

Se Figur 1 for skisse.



Figur 1: Oppgave 9.4.76

Vi kan trygt anta at $p > 0$ (argumentasjonen blir identisk når $p < 0$). La k_1 være stigningstallet til linjen OP og k_2 stigningstallet til linjen OQ. Linjene OP og OQ står vinkelrett på hverandre hvis og bare hvis $k_1 k_2 = -1$.

Ved implisitt derivasjon av uttrykket $y^2 = 4px$ har vi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}.$$

Linjene OP og OQ skal tangere kjeglesnittet, og derfor er

$$k_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} = \frac{2p}{y_1} \tag{1}$$

og

$$k_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_2,y_2)} = \frac{2p}{y_2}. \tag{2}$$

Samtidig har vi at

$$k_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 + p} = \frac{4p(y_1 - y_0)}{y_1^2 + 4p^2} \tag{3}$$

og

$$k_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 + p} = \frac{4p(y_2 - y_0)}{y_2^2 + 4p^2}. \tag{4}$$

Kombinerer vi ligningene (1) og (3) og ligningene (2) og (4) finner vi to uttrykk for y_0:

$$y_0 = \frac{y_1}{2} - \frac{2p^2}{y_1}$$
$$y_0 = \frac{y_2}{2} - \frac{2p^2}{y_2}.$$

Ved å sette disse lik hverandre og multiplisere begge sider med $2y_1y_2$ finner vi:

$$y_1^2 y_2 - 4p^2 y_2 = y_1 y_2^2 - 4p^2 y_1$$
$$y_1 y_2(y_1 - y_2) + 4p^2(y_1 - y_2) = 0$$
$$(y_1 y_2 + 4p^2)(y_1 - y_2) = 0.$$

Vi vet at $y_1 \neq y_2$. Dermed er $y_1 y_2 = -4p^2$, som gir

$$k_1 k_2 = \frac{4p^2}{y_1 y_2} = -1.$$

Altså står linjene OP og OQ vinkelrett på hverandre.

Merk: Vi kan trygt anta at $y_1 \neq 0$ og $y_2 \neq 0$ når vi multipliserer begge sider av ligningen over med produktet $2y_1y_2$, da tangenten i punktet $(0,0)$ aldri vil skjære linjen gitt av $x = -p$.

$\boxed{5}$ *Oppgave 9.6.11.* Vi bruker identiteten

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

og finner at den parametriske ligningen kan skrives som

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Fra kapittel 9.4 vet vi at dette er en hyperbel med brennpunkter i $(\pm\sqrt{2}, 0)$ og skjæringspunkter i $(\pm 1, 0)$. Fordi $x = -\cosh t < 0$ for alle t har vi at partikkelens bane svarer til venstre halvdel av hyperbelen. Videre ser vi at partikkelen beveger seg i positiv y-retning. For skisse, se fasit bakerst i boken.

$\boxed{6}$ *Oppgave 10.1.26.* Avstanden fra (x, y, z) til origo er $d_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Avstanden fra (x, y, z) til $(0, 2, 0)$ er $d_2 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2}$. Ligningen $d_1 = d_2$ gir at $d_1^2 = d_2^2$, som forenkles til $(y-2)^2 = y^2$, dvs. $y^2 - 4y + 4 = y^2$, dvs. $\underline{\underline{y = 1}}$.

$\boxed{7}$ *Oppgave 10.1.27.* Planet gjennom punktet $(1, 1, 3)$ som står vinkelrett på z-aksen er gitt ved $z = 3$. Kuleskallet med radius 5 og sentrum i origo er gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2.$$

Disse to ligningene beskriver sirkelen angitt i oppgaven. Alternativt er sirkelen gitt ved

$$x^2 + y^2 = 4^2, \quad z = 3.$$

$\boxed{8}$ *Oppgave 10.1.30.* $0 \le x, y, z \le 2$.

$\boxed{9}$ *Oppgave 10.1.33.* Kuleskallet med radius 1 og sentrum i $(1, 1, 1)$ er gitt ved ligningen

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Altså har vi:

a) Innsiden av kuleskallet er gitt av ulikheten

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 < 1.$$

b) Utsiden av kuleskallet er gitt av ulikheten

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1.$$

$\boxed{10}$ *Oppgave 10.1.46.* $x^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 2^2$.

$\boxed{11}$ *Oppgave 10.1.50.* Uttrykket bringes på standardform ved komplettering av kvadrater:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z &= 0 \\ x^2 + (y-3)^2 - 3^2 + (z+4)^2 - 4^2 &= 0 \\ x^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 &= 5^2. \end{aligned}$$

Dette er et kuleskall med radius $r = 5$ og sentrum i $(0, 3, -4)$.

$\boxed{12}$ *Oppgave 10.1.56.* Vi finner:

$$\begin{aligned} |PA| &= \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}, \\ |PB| &= \sqrt{(3-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Konvensjon: Vi skriver en vektor $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ som (a, b, c).

$\boxed{13}$ *Oppgave 10.2.25.* La $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$. Da er

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Altså kan vi skrive

$$\mathbf{v} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right).$$

$\boxed{14}$ *Oppgave 10.2.34.* $\mathbf{v}$ har lengde $3/2^2 = \sqrt{3/4}$, så ved å skalere den med $3 \cdot \sqrt{4/3} = \sqrt{12}$ får vi en vektor med lengde 3. Skaleres den med -1 får vi en motsatt rettet vektor. Dermed er

$$-\sqrt{12} \cdot \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$$

en vektor med de ønskede egenskapene.

$\boxed{15}$ *Oppgave 10.2.35.*

a) Vektoren

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2+1, 5-1, 0-5) = (3, 4, -5)$$

har lengde $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$, og derfor retning

$$\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, 4, -5).$$

b) Midtpunktet på linjestykket P_1P_2 har koordinater

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 3, \frac{5}{2}\right).$$

$\boxed{16}$ *Oppgave 10.2.40.* $OB = OA + AB$. Altså er koordinatene til punktet B

$$(-2, -3, 6) + (-7, 3, 8) = (-9, 0, 14).$$

$\boxed{17}$ *Oppgave 10.2.45.* I polarkoordinater er hastighetsvektoren til flyet $(800\text{ km/h}, 90^\circ + 25^\circ)$. På kartesisk form har vi dermed

$$\mathbf{v} = ((800\text{ km/h})\cos 115^\circ, (800\text{ km/h})\sin 115^\circ) \approx (-338{,}09, 725{,}05)\text{ km/h}.$$

$\boxed{18}$ *Oppgave 10.3.5.*

a) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ og $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Videre er

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 2.$$

b) La θ være vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}$. Da er

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|} = \frac{2}{\sqrt{34 \cdot 3}}.$$

c) Skalarkomponenten av u i retning v er

$$|u|\cos\theta = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{34 \cdot 3}} = \frac{2}{\sqrt{34}}.$$

d) Vektorprojeksjonen av u på v er

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} = \frac{2}{34}(0, 5, -3) = \frac{1}{17}(0, 5, -3).$$

19 *Oppgave 10.3.16.* Noen studenter kommer til å ha gjort denne oppgaven. I denne oppgaven er øst y-retning, nord x-retning og oppover z-retning.

La P være knekkpunktet. En vektor med retning fra P til rørets nordre ende er da

$$\mathbf{v} = (10, 0, -2),$$

mens en vektor med retning fra P til rørets østlige ende er

$$\mathbf{u} = (0, 10, 1).$$

Dermed er vinkelen mellom rørene gitt ved

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{v}||\mathbf{u}|}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{104\cdot 101}}\right) \approx 1{,}59\ (\approx 91{,}07^\circ).$$

20 *Oppgave 10.3.17.* To vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ er ortogonale hvis $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Vi regner ut skalarproduktet

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\\ &= |\mathbf{v}_1|^2 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 - |\mathbf{v}_2|^2\\ &= |\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2.\end{aligned}$$

Dermed vil $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ være ortogonale hvis og bare hvis de er like lange, altså $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$.

21 *Oppgave 10.3.22.* Diagonalen i parallellogrammet spent ut av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er gitt av vektoren $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. La φ_1 være vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$, og la φ_2 være vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{w}$. Vi vet at $|\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|$, og vil vise at $\varphi_1 = \varphi_2$. Vi har

$$\cos\varphi_1 = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + |\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{w}|} = \cos\varphi_2.$$

Cosinus er injektiv på $[0, \pi]$. Altså følger det at $\varphi_1 = \varphi_2$.

22 *Oppgave 10.3.28.* Svaret er nei. Moteksempel: Ta $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ og $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$. Da er $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_2 = 0$, men $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er forskjellige.