TMA4105 Matematikk 2, øving 3, vår 2012

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Hass, Weir og Thomas*. Løsninger til eksamensoppgaver finner man på hjemmesida til faget.

Oppgaver fra læreboka

10.4.4 Vi har $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ (se reglene 4 og 5 i boksen øverst på s. 637), og likeledes $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Begge kryssproduktene er altså lik nullvektoren, som har lengde null, og ingen retning.

10.4.17 a) Vi har de to vektorene

$$\mathbf{PQ} = (3 - 2, -1 + 2, 2 - 1) = (1, 1, 1)$$
$$\mathbf{PR} = (3 - 2, -1 + 2, 1 - 1) = (1, 1, 0).$$

Arealet er da gitt som

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-1, 1, 0)| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b)

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}}{|\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

Siden både $\mathbf{n}$ og $-\mathbf{n}$ vil stå vinkelrett på planet PQR, har vi to løsninger: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$.

10.4.23 Vi vet at vinkelen mellom to vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ er gitt av

$$\arcsin \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Vektorene er altså ortogonale hvis og bare hvis brøken er 1, altså hvis og bare hvis $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, og parallelle hvis og bare hvis $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$. Ved beregning av $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ og $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ finner vi at *ingen* av vektorparene er ortogonale, mens $\mathbf{u}$ og $\mathbf{w}$ er parallelle.

10.4.28 Les rutene Properties of the dot product og properties of the cross product i boka.

a) Sann.
b) Sann
c) Sann
d) Sann
e) Sann: Sett r eller s lik 1 i Properties of the cross product.
f) Sann
g) Sann: $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$. Hvorfor?
h) Sann: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ er normal på u og v, så begge sider er 0.

10.4.29 a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ er komponenten av $\mathbf{u}$ langs $\mathbf{v}$. Dermed finner vi vektorprojeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ ved å skalere en retningsvektor i retning $\mathbf{u}$ med $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

b) Som tidligere gir kryssproduktet ønsket ortogonalitet: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

c) Svaret i deloppgave b gir $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.

d) Som angitt i figur 10.33 i boken er $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ ønsket volum.

10.5.9 Som gitt på side 646 er

$$\mathbf{n} = (1, 2, 2)$$

en vektor normalt på planet. En parametrisering av den ønskede linjen er da gitt av

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{n} + \mathbf{n}_0,$$

hvor $\mathbf{n}_0$ kan velges fritt, så lenge det finnes en t slik at $r(t) = (0, -7, 0)$. For eksempel kan vi velge $\mathbf{n}_0 = (0, -7, 0)$ slik at

$$\mathbf{r}(t) = t(1, 2, 2) + (0, -7, 0).$$

10.5.19 Parametriseringen $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t((0, 2, 0) - (2, 0, 2)) + (2, 0, 2) = t(-2, 2, -2) + (2, 0, 2)$$

gjør jobben for passelige valg av a og b. Vi ser at $a = 0$ og $b = 1$ gir ønsket linjestykke.

En skisse av linjestykket er å finne i bokens fasit.

10.5.25 Vektoren $\mathbf{n} = (1, 3, 4)$ er parallell med den oppgitte linjen, så formelen på side 646 gir at

$$1(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z - 5) = 0,$$

eller enklere

$$x + 3y + 4z = 34$$

beskriver ønsket plan.

10.5.35 La $\mathbf{P} = (2, 1, 3)$. Observér at punktet P faktisk ligger på den parametriserte linjen (dette ser vi ved å velge parameteren 0). Altså er avstanden fra punktet P til den parametriserte linjen 0.

10.5.39 Vi skal finne avstanden d fra punktet $S(2, -3, 4)$ til planet $x + 2y + 2z = 13$, som har normalvektor $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$. Denne har lengde $|\mathbf{n}| = \sqrt{9} = 3$. For å finne et punkt P i planet, la oss f.eks. sette $y = z = 0$. Da må $x = 13$, og vi får punktet $P(13, 0, 0)$. Vi vet at

$$d = \frac{|\mathbf{PS} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Vi har $\mathbf{PS} = (-11, -3, 4)$, og finner

$$\mathbf{PS} \cdot \mathbf{n} = (-11, -3, 4) \cdot (1, 2, 2) = -9.$$

Altså er avstanden fra punktet S til planet

$$d = \frac{9}{3} = 3.$$

10.5.47 $\mathbf{m} = (1, 1, 0)$ og $\mathbf{n} = (2, 1, -2)$ er normalvektorer for de respektive planene. Som illustrert i figur 10.41 i boken er vinkelen mellom disse lik vinkelen mellom planene. Dermed er svaret

$$\arccos \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|} = \arccos \frac{2 + 1 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{18}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

10.5.57 $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$ og $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$ er normalvektorer for de respektive planene. Som illustrert i figur 10.39 i boken har skjæringslinjen mellom planene retning gitt av

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = (-1, 1, 0).$$

For å finne en parametrisering av skjæringslinjen trenger vi et punkt på linjen, samt retningen som vi fant over. Ved å løse ligningssystemet bestående av ligningene for de to planene, finner vi slike punkter. Eksempelvis kan vi eliminere x og y:

$$x + y + z = z + 2 = 1, \quad \Rightarrow \quad z = -1.$$

En mulighet er å velge $x = y = 1$, altså punktet $(1, 1, -1)$. Da har vi en parametrisering $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ av skjæringslinjen gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t(-1, 1, 0) + (1, 1, -1).$$

10.6.1 **d** – ellipsoide. (Hvorfor ikke c? Se på hvilke retninger som er "sammenskvist").

10.6.2 **i** – hyperboloide.

10.6.3 **a** – sylinder. (Hvorfor ikke b? Legg merke til hvilken variabel som ikke er pålagt betingelser (x)).

10.6.4 **g** – sirkulær kjegle.

10.6.5 **l** – hyperbolsk paraboloide. (Hvorfor ikke k? Merk at y^2-leddet har positivt fortegn mens z^2-leddet har negativt).

10.6.6 **e** – paraboloide.

10.6.7 **b** – sylinder.

10.6.8 **j** – hyperboloide.

10.6.9 **k** – hyperbolsk paraboloide.

10.6.10 **f** – paraboloide.

10.6.11 **h** – elliptisk kjegle.

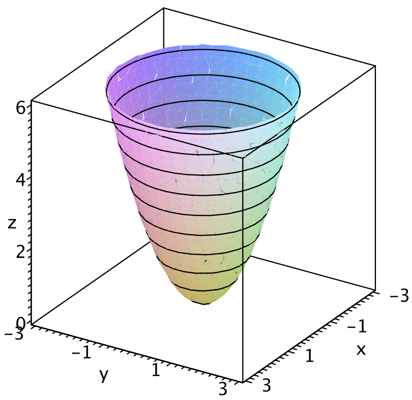
10.6.12 **c** – ellipsoide.

10.6.31 Se bokens skisse i fasit.

10.6.43 Se bokens skisse i fasit, men bytt om på y- og z-aksen.

10.6.44 Sirkulær paraboloide. Sentrert om z-aksen (rotasjonsakse). Snittene med plan $z = c$ for $c \geq 0$ (plan parallelle med xy-planet) er sirkler.

Skisse i figur 1



Figur 1: Oppgave 10.6.44