NTNU
Institutt for matematiske fag

TMA4105 Matematikk 2, øving 4, vår 2012

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

En vektor boken skriver som $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, vil vi ofte skrive som (a, b, c), og tilsvarende i to dimensjoner.

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgaver fra læreboken

10.1.2 Dette beskriver en linje parallell med y-aksen som skjærer xz-planet i $x = -1$, $z = 0$.

10.1.6 $x^2 + y^2 = 4$ beskriver i *planet* en sirkel S med radius $\sqrt{4} = 2$ og sentrum i origo. I *rommet* beskriver samme ligning dermed en sylinder med samme radius, sentrert om z-aksen. Med den ekstra føringen $z = -2$ får vi da et snitt av denne sylinderen i $z = -2$, altså den opprinnelige sirkelen S flyttet 2 enheter nedover på z-aksen.

10.1.7 Ved samme resonnement som i oppgave 10.1.6 beskriver $x^2 + z^2 = 4$ en sylinder med radius 2 sentrert om y-aksen. Føringen $y = 0$ gir et snitt av denne i xz-planet, altså sitter vi igjen med en sirkel i xz-planet (med radius 2 og sentrum i origo).

10.1.12 Setter vi inn $y = 0$ i den oppgitte ligningen får vi

$$x^2 + z^2 = 3.$$

Sammen med $y = 0$ er dette noe vi allerede har beskrvet i oppgave 11.1.7 (radien blir nå $\sqrt{3}$).

10.1.34 Vi vet at kuleskallet[1] med radius R sentrert om origo beskrives av ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Dette beskriver jo nettopp alle punkter (x, y, z) med avstand nøyaktig R til origo. Et punkt (x, y, z) har avstand til origo $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, så alle punkter *innenfor* og på kuleskallet må da gis av ulikheten $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R$. Likeledes må alle punkter *utenfor* og på kuleskallet gis ved $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq R$. Vi ender dermed opp med ulikheten

$$1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2$$

for å beskrive legemet i oppgaven.

10.1.53 I denne oppgaven menes "den korteste avstanden", om det ikke var klart. Vi besvarer her kun a-oppgaven, da de to påfølgende gjøres på helt identisk vis.

a) x-aksen består av alle punkter på formen $(a, 0, 0)$. Avstanden fra (x, y, z) til et slikt punkt er

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2},$$

som åpenbart er minst når $a = x$. Altså er avstanden vi søker simpelthen $\sqrt{y^2 + z^2}$.

10.4.30

a) Som vi vet er både $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ og $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ er ortogonal til $\mathbf{u}$. Dermed er $\mathbf{u}$ en vektor med ønskede egenskaper.

[1] Engelsk: *sphere*. Må ikke forveksles med *kule*, engelsk *ball*, som er området vi skal beskrive. Altså: Kuler er fylte objekter, mens kule*skall* er overflaten deres. Jorden er en kule (eng. *ball*), jordoverflaten er et kuleskall (eng. *sphere*).

b) For eksempel er

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\mathbf{u} - \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathbf{u} - \mathbf{v}\times\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\times\mathbf{u}$$

en slik vektor. Vi har her brukt egenskapene fra side 637.

c) $\mathbf{v}/\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$ er en enhetsvektor med samme retning som $\mathbf{v}$, og $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$, så

$$\sqrt{\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}\mathbf{v}$$

er en vektor med ønsket egenskap.

d) Som vi vet er dette gitt simpelthen ved $|\mathbf{u}\times\mathbf{w}|$.

11.1.6 Vi beregner

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= \left(-2\sin\frac{t}{2}, 2\cos\frac{t}{2}\right)\\
\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) &= \left(-\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{4}\mathbf{r}(t)
\end{aligned}$$

I de aktuelle punktene finner vi da

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(\pi) &= (0,4)\\
\mathbf{r}(3\pi/2) &= (-4/\sqrt{2}, 4/\sqrt{2})\\
\mathbf{v}(\pi) &= (-2,0)\\
\mathbf{v}(3\pi/2) &= (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})\\
\mathbf{a}(\pi) &= (0,-1)\\
\mathbf{a}(3\pi/2) &= (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})
\end{aligned}$$

11.1.17 Ved å derivere finner vi funksjoner for hastighet og akselerasjon, nemlig

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1}{t^2+1}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right),\\
\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) &= \left(\frac{2-2t^2}{(t^2+1)^2}, -\frac{2t}{(t^2+1)^2}, \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}}\right).
\end{aligned}$$

På angitt tidspunkt (0) har vi da

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(0) &= (0,1,0)\\
\mathbf{a}(0) &= (2,0,1).
\end{aligned}$$

Vi ser at $\mathbf{v}(0)\cdot\mathbf{a}(0) = 0$, så vektorene står altså ortogonalt på hverandre.

11.1.21 Vi beregner først

$$\mathbf{r}'(t) = (a\cos t, -a\sin t, b).$$

En tangentvektor til kurven i $\mathbf{r}(2\pi)$ er da

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(2\pi) = (a,0,b).$$

En mulig parametrisering av tangentlinjen til kurven i $\mathbf{r}(2\pi)$ er derfor $\mathbf{s}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(2\pi) + t(a,0,b) = (0,a,2\pi b) + t(a,0,b) = (ta, a, (2\pi+t)b).$$

11.1.23 a) Vi beregner

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-\cos t, -\sin t).$$

i) *Ja*, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, så $|\mathbf{v}|$ er en konstantfunksjon. Farten er alltid 1.
ii) *Ja*, $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = \sin t \cos t - \cos t \sin t = 0$.
iii) *Mot klokken.* Inspisér $\mathbf{r}$ i en liten omegn av 0.
iv) *Ja*, $\mathbf{r}(0) = (1, 0)$.

b) Merk at vi under transformasjonen $s(t) = 2t$ kan resonnere slik vi gjorde i punkt a).

i) *Ja.* Merk at nevnte transformasjon gjør at farten er 2.
ii) *Ja.*
iii) *Mot klokken.*
iv) *Ja.*

c) Merk at vi under transformasjonen $s(t) = t - \pi/2$ kan resonnere slik vi gjorde i punkt a).

i) *Ja.* Farten er som før 1.
ii) *Ja.*
iii) *Mot klokken.*
iv) *Nei*, da nevnte transformasjon flytter startpunktet til $(0, -1)$.

d) Vi beregner

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-\sin t, -\cos t)$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-\cos t, \sin t).$$

i) *Ja*, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$, så $|\mathbf{v}|$ er en konstantfunksjon. Farten er alltid 1.
ii) *Ja*, $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0$.
iii) *Med klokken.* Inspisér $\mathbf{r}$ i en liten omegn av 0.
iv) *Ja*, $\mathbf{r}(0) = (1, 0)$.

e) Vi beregner

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-2t \sin t^2, 2t \cos t^2)$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-2 \sin t^2 - 4t^2 \cos t^2, 2 \cos t^2 - 4t^2 \sin t^2).$$

i) *Nei*, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 \sin^2 t^2 + 4t^2 \cos^2 t^2} = 2t$, så $|\mathbf{v}|$ er ikke en konstantfunksjon.
ii) *Nei*, $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) \neq 0$.
iii) *Mot klokken.* Inspisér $\mathbf{r}$ i en liten omegn av 0.
iv) *Ja*, $\mathbf{r}(0) = (1, 0)$.

11.1.31 La $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ kan skrives

$$\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)).$$

Anta først at f_1, f_2 og f_3 alle er kontinuerlige. Vi må da vise at $\mathbf{r}$ er kontinuerlig i et vilkårlig punkt t_0. La derfor $\varepsilon > 0$. Siden f_1, f_2 og f_3 alle er kontinuerlig (per antagelse) finnes $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ slik at når $|t - t_0| < \delta_i$, så er $|f_i(t) - f_i(t_0)| < \varepsilon/\sqrt{3}$. La δ være den minste av δ_1, δ_2 og δ_3. Hvis $|t - t_0| < \delta$, er da $|t - t_0| < \delta_i$ for $i = 1, 2, 3$. Dermed er $|f_i(t) - f_i(t_0)| < \varepsilon/\sqrt{3}$ for $i = 1, 2, 3$. Altså er

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| = \sqrt{(f_1(t) - f_1(t_0))^2 + (f_2(t) - f_2(t_0))^2 + (f_3(t) - f_3(t_0))^2} < \varepsilon.$$

Altså er $\mathbf{r}$ kontinuerlig.

Beviset over var svært formelt; for den andre implikasjonen vil vi nå *indikere* beviset uten å være like formelle[2]. Vi antar nå at $\mathbf{r}$ kontinuerlig, og vil vise at f_1, f_2 og f_3 da også må være det. Siden vi har antatt at $\mathbf{r}$ er kontinuerlig i et gitt punkt, si t_0, så vet vi at for en *hvilken som helst* $\varepsilon > 0$, finnes en $\delta > 0$ slik at når $|t - t_0|$, så er

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| = \sqrt{(f_1(t) - f_1(t_0))^2 + (f_2(t) - f_2(t_0))^2 + (f_3(t) - f_3(t_0))^2} < \varepsilon.$$

Hvis vi ikke har kontroll over størrelsene $f_i(t) - f_i(t_0)$, ser vi at det er *umulig* å garantere lovnaden over. Har vi ikke kontroll på hvert av leddene under rottegnet, har vi heller ingen mulighet til å oppfylle løftet vårt. Med andre ord: diskontinuitet i bare én av f_i'ene i bare ett punkt er nok til å ødelegge kontinuiteten til $\mathbf{r}$. Dermed *må* f_1, f_2 og f_3 alle være kontinuerlige.

$\boxed{\text{11.2.9}}$ De ubestemte integralene til komponentene er

$$\int \frac{3}{2}\sqrt{t+1}\mathrm{d}t = (t+1)^{3/2} + A$$
$$\int e^{-t}\mathrm{d}t = -e^{-t} + B$$
$$\int \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \ln(t+1) + C$$

for konstanter A, B og C. Initialbetingelsen $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 1)$ gir $1 + A = 0$, $-1 + B = 0$ og $C = 1$, slik at endelig løsning blir

$$\mathbf{r}(t) = \Big((t+1)^{3/2} - 1, -e^{-t} + 1, \ln(t+1) + 1\Big).$$

$\boxed{\text{11.2.13}}$ Teksten beskriver med ord differensialligningen

$$\mathbf{r}''(t) = (3, -1, 1)$$

og betingelsene

$$\mathbf{r}(0) = (1, 2, 3) \qquad |\mathbf{r}'(0)| = 2,$$

samt at $\mathbf{r}'(0) = k(4-1, 1-2, 4-3) = k(3, -1, 1)$ for en eller annen $k > 0$.
Løser vi differensialligningen som vanlig (komponentvis) finner vi

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + A_1t + B_1, -\frac{1}{2}t^2 + A_2t + B_2, \frac{1}{2}t^2 + A_3t + B_3\right)$$

for ukjente konstanter A_i og B_i. Betingelsen på $\mathbf{r}(0)$ gir $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 3$, så vi har

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + A_1t + 1, -\frac{1}{2}t^2 + A_2t + 2, \frac{1}{2}t^2 + A_3t + 3\right).$$

Betingelsen på $\mathbf{r}'(0)$ gir $A_1 = 3k$, $A_2 = -k$, $A_3 = k$, slik at betingelsen på $|\mathbf{r}'(0)|$ så gir

$$2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{9k^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{11}k,$$

så $k = 2/\sqrt{11}$. Dermed er

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1, -\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{\sqrt{11}}t + 2, \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3\right).$$

[2]Ekstraoppgave: Vis også denne delen like formelt som første del. Det er ikke noe vanskeligere.

11.2.14 Teksten beskriver med ord differensialligningen

$$\mathbf{r}''(t) = (2, 1, 1)$$

og betingelsene

$$\mathbf{r}(0) = (1, -1, 2) \qquad |\mathbf{r}'(0)| = 2,$$

samt at $\mathbf{r}'(0) = k(3-1, 0-(-1), 3-2) = k(2, 1, 1)$ for en eller annen $k > 0$.
Løser vi differensialligningen som vanlig (komponentvis) finner vi

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2 + A_1 t + B_1, \frac{1}{2}t^2 + A_2 t + B_2, \frac{1}{2}t^2 + A_3 t + B_3\right)$$

for ukjente konstanter A_i og B_i. Betingelsen på $\mathbf{r}(0)$ gir $B_1 = 1$, $B_2 = -1$, $B_3 = 2$, så vi har

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2 + A_1 t + 1, \frac{1}{2}t^2 + A_2 t - 1, \frac{1}{2}t^2 + A_3 t + 2\right)$$

Betingelsen på $\mathbf{r}'(0)$ gir $A_1 = 2k$, $A_2 = k$, $A_3 = k$, slik at betingelsen på $|\mathbf{r}'(0)|$ så gir

$$2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{4k^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{6}k,$$

så $k = 2/\sqrt{6}$. Dermed er

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}t + 1, \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}t - 1, \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}t + 2\right)$$

11.2.24 Etter en tid t har kule B posisjon

$$\mathbf{b}(t) = \left(R, R\tan\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right).$$

Når kule A har beveget seg R i horistonalretning, er tiden

$$T = \frac{R}{v_0 \cos\alpha}$$

gått. Da befinner kule A seg i posisjon

$$\mathbf{a}(T) = \left(R, (v_0 \sin\alpha)\frac{R}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v_0\cos\alpha}\right)^2\right) = \left(R, R\tan\alpha - \frac{1}{2}gT^2\right).$$

Dermed ser vi at $\mathbf{a}(T) = \mathbf{b}(T)$. Med andre ord: Når kule A har nådd en avstand R i horisontalretning kolliderer de to kulene uansett hva v_0 er. Kollisjonen er altså ingen tilfeldighet.

11.2.30 Skriv $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ som

$$\mathbf{r}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

for skalare funksjoner $f_1, f_2, f_3 : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Per definisjon er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \mathbf{r}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Siden $\mathbf{r}$ er antatt kontinuerlig, viser oppgave 11.1.31 at f_i-ene også er kontinuerlig. Da gir kalkulus' fundamentalteorem for skalare funksjoner (slik vi kjenner det fra Matematikk 1) at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f_i(t)$$

for $i = 1, 2, 3$. Dermed er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \mathbf{r}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = \mathbf{r}(t),$$

som var det vi skulle vise.

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en på `http://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2013v/gml_eks`. Der er kommet forespørsler som at disse legges ved i selve løsningsforslagene, men dessverre er ofte de gamle LaTeX-filene gått tapt.

Løsningsforslaget fra våren 2010 løser oppgave 2 ved bruk av gradienter. Da inneværende øving ble gitt, var dette ennå ikke gjennomgått i forelesningene. Under følger derfor en alternativ løsning.

Eksamen vår 2010, oppgave 2 (alternativ løsning uten gradienter)

Skjæringen mellom de to flatene er gitt ved

$$x^2 + 4y^2 = 2x - 8y - 1,$$

som ved komplettering av kvadrater kan skrives som

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + (y+1)^2 = 1.$$

Skjæringskurvens projeksjon i xy-planet er altså en ellipse (med $a = 2$ og $b = 1$ og sentrum i $(1, -1)$). Vi vet at en slik ellipse (i planet) kan parametriseres ved

$$(2\cos t + 1, \sin t - 1) \quad \text{for } 0 \le t < 2\pi.$$

Tredje komponent av vår skjæringskurve er så gitt av $z = 2x - 8y - 1$. Derfor kan skjæringskurven vår parametriseres med $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t + 1, \sin t - 1, 4\cos t + 2 - 8\sin t + 8 - 1).$$

Punktet av interesse, $(3, -1, 13)$, fås ved $t = 0$. Videre har vi

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (-2\sin t, \cos t, -4\sin t - 8\cos t)\\ \mathbf{r}'(0) &= (0, 1, -8).\end{aligned}$$

Normalisert blir dette vektoren

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{1}{\sqrt{65}}(0, 1, -8).$$

Denne vektoren har *negativ* **k**-komponent, men $-\mathbf{T}$ er en like god enhetstangentvektor i det aktuelle punktet, så vektoren vi søker er altså

$$-\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{65}}(0, -1, 8).$$

Løsningsorslaget tilhørende eksamen våren 2010 løser oppgaven (raskere?) ved bruk av gradienter og nivåflater.

Maple-oppgaver

Forslag til konkret Maple-kode finnes på `http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4105/2013v/felles/lf/4/lf4-maple.pdf` og `http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4105/2013v/felles/lf/4/lf4-maple.mw`. Under følger løsningsforslag de matematiske delene av oppgavene.

Maple 2 Vi kan for eksempel snitte med planet $x = c$ for forskjellige c. Vi finner da $z = c^2/4 - y^2$, som vi gjenkjenner som parabler som åpner mot negativ z-retning. Forslaget til Maple-kode tegner slike for $c = 0$ og $c = 1/2$. For å få åpning i positiv z-retning kan vi snitte med plan på formen $y = c$, som som ønsket gir $z = x^2/4 - c^2$. Maple-forslagene velger også her $c = 0$ og $c = 1/2$.

Maple 3 Ved å snitte med plan på formen $z = c$ får vi hyperbler $y^2 = x^2/a^2 - c$. Maple-forslaget tegner slike for $c = 1/10$ (åpninger i x-retning) og for $c = -1/2$ (åpninger i y-retning).