TMA4105 Matematikk 2, øving 5, vår 2013

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Hass, Weir og Thomas*. Løsninger til eksamensoppgaver finner man på hjemmesida til faget.

Oppgaver fra læreboka

11.3.1 Først finner vi tangentvektoren

$$\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}. \tag{1}$$

Vi deler på lengden slik at $\mathbf{T}$ blir

$$\mathbf{T}(t) = -\frac{2}{3}\sin t\mathbf{i} + \frac{2}{3}\cos t\mathbf{j} + \frac{1}{3}\sqrt{5}\mathbf{k}. \tag{2}$$

Buelengden er

$$L = \int_0^\pi |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = 3\pi. \tag{3}$$

11.3.9 Oppgaven er dårlig formulert. Hva menes med "from the origin" når kurven ikke går gjennom origo? Vi får anta at det menes $\mathbf{r}(0)$.

Dermed er vi interessert i å finne den T som gir

$$\int_0^T |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t = 26\pi. \tag{4}$$

Vi regner ut at

$$\mathbf{r}'(t) = (5\cos t, -5\sin t, 12),$$

slik at

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{25\cos^2 + 25\sin^2 t + 12^2} = 13.$$

Altså reduseres (**??**) til $13T = 26\pi$, slik at $T = 2\pi$. Det etterspurte punkt er dermed

$$\mathbf{r}(T) = (0, 5, 24\pi).$$

11.3.18 Vi beregner buelengde med formelen $L = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\,\mathrm{d}t$ i de tre tilfellene.

a. Hastighetsvektoren er $\mathbf{r}'(t) = -4\sin(4t)\mathbf{i} + 4\cos(4t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, følgelig er lengden av hastighetsvektoren $|\mathbf{r}'(t)| = 4\sqrt{2}$. Vi får at buelengden er $L = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\pi$.

b. Hastighetsvektoren er $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})\mathbf{i} + \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$, følgelig er lengden av hastighetsvektoren $|\mathbf{r}'(t)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vi får at buelengden er $L = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4\pi = 2\sqrt{2}\pi$.

c. Hastighetsvektoren er $\mathbf{r}'(t) = -\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, følgelig er lengden av hastighetsvektoren $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$. Vi får at buelengden er $L = \sqrt{2} \cdot 2\pi = 2\sqrt{2}\pi$.

11.4.5 Her lar vi f være en to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon. Vi parametriserer kurven $y = f(x)$ ved $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$.

a) Her skal vi finne en formel for krumningen til $\mathbf{r}$. Vi begynner med å regne på en del hjelpestørrelser:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(x) &= \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j} \\
|\mathbf{v}(x)| &= \sqrt{1 + (f'(x))^2} \\
\mathbf{T}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\mathbf{i} + \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x)^2}}\mathbf{j} \\
\frac{d\mathbf{T}}{dx} &= -\frac{f'(x)f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}} \\
\left|\frac{d\mathbf{T}}{dx}\right| &= \left|\frac{\sqrt{(f'(x))^2(f''(x))^2 + (f''(x))^2}}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}\right| = \left|\frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}\sqrt{1 + (f'(x))^2}\right|
\end{aligned}$$

Dermed er krumningen

$$\kappa(x) = \frac{|\frac{d\mathbf{T}}{dx}|}{|v(x)|} = \frac{|(f''(x))|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

b) Nå skal vi bruke denne formelen på $f(x) = \ln(\cos x))$. Vi får $f'(x) = -\tan x$, $f''(x) = -\cos^{-2} x$ og følgelig

$$\kappa(x) = \frac{|-\cos^{-2} x|}{(1 + \tan^2 x)^{3/2}} = \left|\frac{\cos^{-2} x}{\cos^{-3} x(\cos^2 x + \sin^2 x)^{3/2}}\right| = \cos x.$$

c) Siden f er to ganger deriverbar er x^* et infleksjonspunkt for f hvis og bare hvis $f''(x^*) = 0$. Følgelig er krumningen i et infleksjonspunkt

$$\kappa(x^*) = \frac{|f''(x^*)|}{(1 + (f'(x^*))^2)^{3/2}} = 0$$

$\boxed{\text{11.4.6}}$ Per definisjon er $\kappa = \frac{1}{v}|\mathbf{T}|$ og $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$, som gir $\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}' = v'\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}$ siden $\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N}$. Altså er $\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = |v\mathbf{T} \times v^2\kappa\mathbf{N}| = \kappa v^3$. Det vil si at $\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{v^3}$. Lar vi $\mathbf{r}(T) = [f(t), g(t), 0]$ får vi $v = \left(f'(t)^2 + g'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Dermed

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\left(f'(t)^2 + g'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

$\boxed{\text{11.4.18}}$ Vi bruker formelen fra oppgave 11.4.6. Vi har $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\sin t\mathbf{j}$. Vi setter inn i formelen med $f(t) = a\cos t$ og $g(t) = b\sin t$. Krumminga er da

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5}$$

Vi ser at $\kappa(t)$ er størst når $t = 0, \pi$ og minst når $t = \pm\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{11.4.21}}$ Punktet $(\frac{\pi}{2}, 1)$ svarer til $t = \frac{\pi}{2}$. Vi starter med å finne enhetstangentvektor, enhetsprinsipalnormal og krumminga i punktet. Vi har $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$, noe som gir $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\mathbf{r}'(t)$. Krumminga, gitt ved formelen i oppgave 11.4.6, er $\kappa(t) = \frac{|sint|}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$. Det vil si at $\kappa(\frac{\pi}{2}) = 1$, noe som betyr at krummingsradien $\rho = \frac{1}{\kappa}$ også er 1. For å finne normalvektor må vi derivere enhetstangentvektoren. Vi får $\mathbf{T}'(t) = \frac{\cos t\sin t}{\left(1+\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} - \frac{\sin t}{\left(1+\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i}$. Vi deler på lengden for å få enhetsprinsipalnormal

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}\mathbf{j}. \tag{6}$$

Vi finner origio i smygsirkelen. Først observerer vi at $\mathbf{N}(\frac{\pi}{2}) = -1\mathbf{j}$, og vi har dermed at origio er gitt ved $(\frac{\pi}{2}, 1) + \rho(\frac{\pi}{2})N(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 0)$. Ligninga for en sirkel med radius 1 med origo i $(\frac{\pi}{2}, 0)$ er

$$(x - \frac{\pi}{2})^2 + y^2 = 1. \tag{7}$$

11.5.3 Vi regner $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{k}$. I $t = 1$ er hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(1) = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Vi har at $\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$, som gir for $t = 1$, $\kappa = \frac{2\sqrt{5}}{27}$. Det gir $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2 = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, og $a_T = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_N^2} = \frac{4}{3}$.

11.5.6 Vi finner

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + e^t(\sin t + \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \\
|\mathbf{v}| &= e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 2} = \sqrt{4}e^t = 2e^t, \\
a_T &= \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = 2e^t, \\
\mathbf{a} &= e^t(-2\sin t)\mathbf{i} + e^t(2\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \\
|\mathbf{a}| &= e^t\sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t) + 2} = \sqrt{6}e^t \\
a_N &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{6e^{2t} - 4e^{2t}} = \sqrt{2}e^t.
\end{aligned}$$

For $t = 0$ har vi da $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{T} + \sqrt{2}\mathbf{N}$.

11.5.14 Vi har $\mathbf{T}(t) = -\cos t\mathbf{i} + \sin\mathbf{j}$, $\mathbf{N}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ og $\kappa(t) = \frac{1}{3\cos t \sin t}$. Da er $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = -1$ og $\tau = 0$. Siden alt foregår i ett plan må τ være lik null.

11.5.21 Vi skal verifisere formelen

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}.$$

La α være vinkelen mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{a}$. Vi har da at

$$\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{v}||\mathbf{a}|\sin\alpha}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{a}|\sin\alpha}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{a_N}{|\mathbf{v}|^2},$$

hvor $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2$ (s. 693 i læreboka). Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{a_N}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\kappa|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \kappa.$$

11.5.26 For heliksen har vi $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$. Da vil hastigheten og akselerasjonen være $\mathbf{v}(t) = -a\sin t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ og $\mathbf{a}(t) = -a\cos t\mathbf{i} - a\sin t\mathbf{j}$. Og vi får

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|^2} = \frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}. \tag{8}$$

Dersom $a = 0$ gjelder ikke formelen over da brøken vil være $\frac{0}{0}$. Fikser $a \neq 0$. Da får vi $\tau(b) = \frac{b}{a^2+b^2}$, og $\tau'(b) = 0$ impliserer at $|a| = |b|$. Da $\tau \geq 0$, $\tau(0) = 0$ og $\tau(\infty) = 0$ vet vi at dette må være toppunkt. I toppunktet får vi at $\tau_{max} = \frac{1}{2a}$.