TMA4105 Matematikk 2, øving 6, vår 2012

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgaver fra læreboken

11.6.4 Vi har $r = a(1+\sin t)$, $\dot{r} = a\cos t$, $\ddot{r} = -a\sin t$, $\theta = 1-e^{-t}$, $\dot{\theta} = e^{-t}$ og $\ddot{\theta} = -e^{-t}$, og derfor er

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta = a(\cos t)\mathbf{u}_r + ae^{-t}(1+\sin t)\mathbf{u}_\theta,\\
\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta\\
&= -a\left(\sin t + (1+\sin t)e^{-2t}\right)\mathbf{u}_r - ae^{-t}(1+\sin t - 2\cos t)\mathbf{u}_\theta.
\end{aligned}$$

11.Questions.1 Reglene står i kapittel 11.1 og 11.2: Derivasjon skjer komponentvis gitt at alle komponentene er deriverbare. Integrasjon skjer også komponentvis gitt at alle komponentene er integrerbare. Det er mange eksempler i boka.

12.1.8

a) Funksjonen er definert når uttrykket under rottegnet er positivt, dvs disken $x^2 + y^2 \leq 9$.

b) Vi ser at funksjonen er maksimalt 3 og minimalt 0. Den tar alle verdier mellom 0 og 3 så verdimengden er $[0, 3]$.

c) Nivåkurvene blir sirkler.

d) Randen blir sirkelen $x^2 + y^2 = 3^2$.

e) Området er en lukket disk fordi den inneholder alle randpunktene.

f) Definisjonsmengden er åpenbart begrenset.

12.1.11

a) Siden $\sin^{-1}$, eller arcsin, kun er definert på verdimengden til sin, altså $[-1, 1]$, er $f(x, y)$ kun definert når $y - x \in [-1, 1]$. Det naturlige, største definisjonsmengden til f er dermed en stripe i $\mathbb{R}^2$ omsluttet av linjene $y = x + 1$ og $y = x - 1$ (disse linjene er også inkludert i definisjonsmengden).

b) Man har noe frihet i å velge hva en ønsker at skal være verdimengde for $\sin^{-1}$, siden sin er periodisk. Det mest naturlige og vanligste valget er at $\sin^{-1}(x)$ skal være den vinkel $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ som gir $\sin(\theta) = x$. Hvis vi følger denne konvensjonen har selvsagt f også verdimengde $[-\pi/2, \pi/2]$.

c) Siden $\sin^{-1}$ er injektiv, impliserer $f(x, y) = c$ for en konstant c at $y - x = k$ for en konstant k. Altså er nivåkurvene til f linjer på formen $y = k + x$ i definisjonsmengden til f for konstante k.

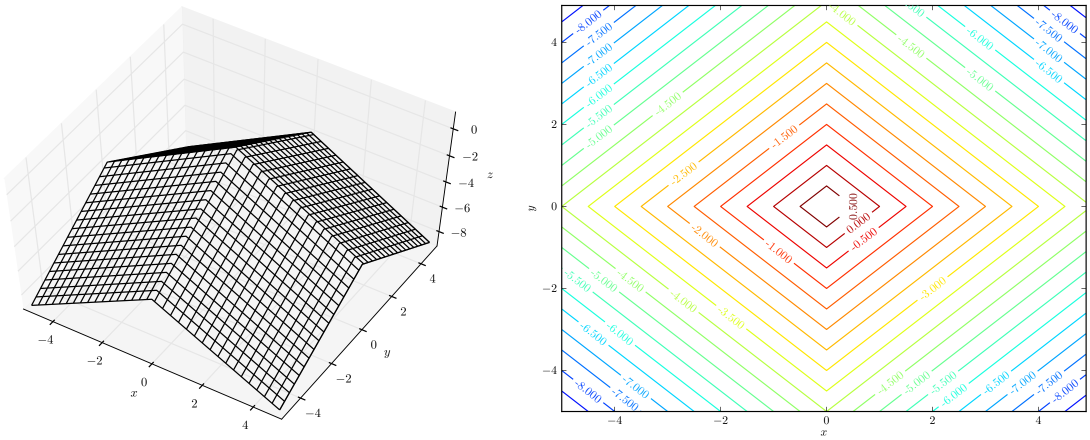
d) Det følger direkte fra vår beskrivelse av definisjonsmengden at dets rand er gitt av linjene $y = x + 1$ og $y = x - 1$.

e) Definisjonsmengden er lukket. Komplementet til definisjonsmengden er området i $\mathbb{R}^2$ *strengt* utenfor de to linjene beskrevet i deloppgave **a)**. Dette området er åpent (intuitivt: du kommer så nært de begrensende linjene du bare vil), så definisjonsmengden er lukket.

f) Definisjonsmengden er åpenbart ubegrenset. For eksempel vil punktet (k, k) ligge i definisjonsmengden for alle valg av $k \in \mathbb{R}$.

12.1.13–18 (13,f); (14,e); (15,a); (16,c); (17,d); (18,b).

12.1.28 Se figur 1.



Figur 1: Plott tilhørende oppgave 12.1.28. **Venstre: a)** Flaten definert av $z = 1 - |x| - |y|$. **Høyre: b)** Nivåkurver for samme flate.

12.1.35 Se skisse bakerst i boken.

12.1.41

Setter man inn punktet i funksjonen får man $f(3, -1.1) = 2$. Da blir likninga $\sqrt{x - y} - \ln z = 2$

12.2.10 Vi vet at $h(x, y) = |xy| - 1$ er kontinuerlig. Siden cosinus og det å ta tredjerot er kontinuerlige funksjoner av én variabel, er funksjonen i oppgaven kontinuerlig, og dermed er svaret 1.

12.2.17 Vi omformulerer uttrykket ved å multiplisere teller og nevner med $\sqrt{x} + \sqrt{y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{x} + 2x - 2\sqrt{yx} + x\sqrt{y} - y\sqrt{y} + 2\sqrt{xy} - 2y}{x - y} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - y)}{x - y} + \frac{2(x - y)}{x - y} \\
&= \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2.
\end{aligned}$$

Merk at vi *har* brukt opplysningen om at uttrykket kun er definert når $x \neq y$![1] Med dette uttrykket i hende er det klart at den etterspurte grenseverdien er 2.

12.2.31 **a)** Polynomer er kontinuerlige overalt, så f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}^3$.

b) Det er nærliggende å anta at den angitte f har definisjonsmengde definert av

$$x^2 + y^2 \geq 1,$$

altså hele $\mathbb{R}^3$ bortsett fra det indre av en sylinder med radius 1 om z-aksen. Det er da klart at f da er kontinuerlig på hele sitt definisjonsområde.

12.2.37 Når $x = 0$ blir går den mot -1. Når $y = 0$ går den mot 1. Altså eksisterer ikke grensen.

[1] Oppgave: Hvor brukte vi det? Hvorfor?

12.3.12 Husk først at den deriverte til $\tan^{-1}$ i et punkt x er $1/(1+x^2)$. Vi finner derfor ved definisjon av partiellderiverte og bruk av kjerneregelen at

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

12.3.43 Bare regner ut: $g_x(x,y) = 2xy + y\cos x$, $g_y(x,y) = x^2 - \sin y + \sin x$.

Andrederiverte: $g_{xx}(x,y) = 2y - y\sin x$, $g_{yy}(x,y) = -\cos y$.
$g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = 2x + \cos x$.

12.3.53 Per definisjon har vi

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{(1,2)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h}$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right|_{(1,2)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1,2+h)-f(1,2)}{h}.$$

Vi beregner derfor

$$f(1+h,2) = -6h^2 - 13h - 4$$
$$f(1,2+h) = -2h - 4$$
$$f(1,2) = -4,$$

slik at

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right|_{(1,2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-6h^2-13h}{h} = \lim_{h\to 0}(-6h-13) = -13$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right|_{(1,2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h} = -2.$$