TMA4105 Matematikk 2, øving 7, vår 2013

Løsningsforslag

Notasjon og merknader

En vektor boken skriver som $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, vil vi ofte skrive som (a, b, c), og tilsvarende i to dimensjoner.

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgaver fra læreboken

12.4.1 Vi vet at

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sin t & \qquad y'(t) &= \cos t \\ x'(\pi) &= 0 & \qquad y'(\pi) &= -1. \end{aligned}$$

Kjerneregelen gir så

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\partial w}{\partial x}(t)x'(t) + \frac{\partial w}{\partial y}(t)y'(t) \\ w'(\pi) &= 2x(\pi)x'(\pi) + 2y(\pi)y'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Alternativ: Ved å sette inn uttrykkene for $x(t)$ og $y(t)$ får vi at $w(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, altså at w er en konstantfunksjon. Dens deriverte er derfor selvfølgelig 0.

12.4.11 Vi kommer til å få behov for

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{1}{q-r} \qquad \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{r-p}{(q-r)^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{p-q}{(q-r)^2},$$

som alle finnes ved hjelp av de vanlige derivasjonsteknikkene. Videre er

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z} = 1,$$

slik at kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{q-r} + \frac{r-p}{(q-r)^2} + \frac{p-q}{(q-r)^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{q-r} - \frac{r-p}{(q-r)^2} + \frac{p-q}{(q-r)^2} = \frac{2(p-r)}{(q-r)^2} = \frac{z}{(z-y)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{q-r} + \frac{r-p}{(q-r)^2} - \frac{p-q}{(q-r)^2} = \frac{2(q-p)}{(q-r)^2} = \frac{-y}{(z-y)^2}. \end{aligned}$$

Evaluert i det angitte punkt finner vi da henholdsvis 0, 1 og -2.

12.4.27 La $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 7.$$

Vi vil trenge de partiellderiverte til F, så la oss beregne dem:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= 2x + y & \qquad F_y(x, y) &= x + 2y \\ F_x(1, 2) &= 4 & \qquad F_y(1, 2) &= 5. \end{aligned}$$

F er åpenbart en deriverbar funksjon, og oppgaveteksten lover at $F(x, y) = 0$ gir at y er en deriverbar funksjon av x. Siden $F_y(1, 2) \neq 0$, er betingelsene for Teorem 8 oppfylt, så

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -\frac{F_x(1,2)}{F_y(1,2)} = -\frac{4}{5}.$$

12.4.43 Kjerneregelen *anvendt to ganger* gir[1][2]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Siden

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = x && \frac{\partial u}{\partial y} = -y && \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 && \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = y && \frac{\partial v}{\partial y} = x && \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 && \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,
\end{aligned}$$

og rekkefølgen for partiellderivasjon er ubetydelig, blir kryssleddene

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}xy$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}xy.$$

Merk at disse har motsatt fortegn, og vil kansellere i det endelige uttrykket. Vi finner altså at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial w}{\partial u} + y^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + y^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial w}{\partial u} + x^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}xy - 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}xy \\
&= (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).
\end{aligned}$$

Siden w oppfyller Laplaces ligning med hensyn på u og v, er parentesen i det siste uttrykket over lik 0. Dermed ser vi at w oppfyller Laplaces ligning også med hensyn på x og y.

12.4.43 (alternativ løsning)

Der har kommet forespørsler om en mer detaljert løsning på oppgave 12.4.43. Dette følger her. Dersom du ikke hadde problemer med å forstå 12.4.43, kan du bare hoppe over denne løsningen.

Jeg gjetter på at mye av forvirringen folk har rundt oppgaven egentlig kommer av at notasjon som $\frac{\partial w}{\partial x}$ kan sammenblande *funksjoner* og *funksjonsverdier*, som kan være forvirrende under "store" kjerneregelanvendelser. Under forsøker jeg en alternativ fremstilling av oppgave 12.4.43, med annen notasjon[3]. For en funksjon $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, beskriver her $\partial_1 g$ og $\partial_2 g$ de partiellderiverte til g med hensyn på henholdsvis første og andre variabel. Blandede partiellderiverte skriver vi som $\partial_1\partial_2 g$ (eller motsatt, siden rekkefølgen er ubetydelig), og andreordens skriver vi for eksempel som ∂_1^2. Som et eksempel på oversetting til vanlig notasjon har vi:

$$\partial_1 g = \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$(\partial_2^2 g)(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y).$$

[1] Her må man også huske produktregelen når man deriverer andre gang.

[2] Husk for all del at $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$! Det anbefales også å holde tungen rett i munnen...

[3] For å komme spørsmålet i forkjøpet: Nei, denne notasjonen er ikke "pensum" – den er her bare i et forsøk på å skille mellom funksjoner og verdier i denne oppgaven.

Merk forskjellen på *funksjonene* på første linje og *verdiene* på andre linje!

Til slutt vil jeg presisere at løsningen som følger er gjort i ekstrem detalj. Det kan være nyttig for å forstå hva som skjer, men i praksis vil en alltid løse slike oppgaver som i det første forslaget!

La oss først ha på det rene hva vi har å gjøre med i oppgaven. Vi har funksjoner $u, v, w, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hvor

$$w(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) \qquad \partial_1^2 f + \partial_2^2 f = 0.$$
$$v(x,y) = xy \qquad u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned}(\partial_1 w)(x,y) &= (\partial_1 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_1 u)(x,y) + (\partial_2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_1 v)(x,y)\\ (\partial_2 w)(x,y) &= (\partial_1 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_2 u)(x,y) + (\partial_2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_2 v)(x,y).\end{aligned}$$

For å være veldig nøye og unngå videre forvirring, finner vi på noen nye navn på funksjoner: la $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$\alpha(x,y) = (\partial_1 f)(u(x,y), v(x,y)) \quad \text{og} \quad \beta(x,y) = (\partial_2 f)(u(x,y), v(x,y)).$$

Da kan ligningene over skrives klarere som

$$\begin{aligned}\partial_1 w &= \alpha \partial_1 u + \beta \partial_1 v\\ \partial_2 w &= \alpha \partial_2 u + \beta \partial_2 v.\end{aligned}$$

Vi er interessert i $\partial_1^2 w$ og $\partial_2^2 w$, og ser at vi per produktregelen har

$$\begin{aligned}\partial_1^2 w &= (\partial_1 \alpha)(\partial_1 u) + \alpha \partial_1^2 u + (\partial_1 \beta)(\partial_1 v) + \beta \partial_1^2 v\\ \partial_2^2 w &= (\partial_2 \alpha)(\partial_2 u) + \alpha \partial_2^2 u + (\partial_2 \beta)(\partial_2 v) + \beta \partial_2^2 v.\end{aligned}$$

Disse uttrykkene lar seg forenkle ved å beregne

$$\begin{aligned}(\partial_1 u)(x,y) &= x & (\partial_2 u)(x,y) &= -y\\ (\partial_1 v)(x,y) &= y & (\partial_2 v)(x,y) &= x\\ (\partial_1^2 u)(x,y) &= 1 & (\partial_2^2 u)(x,y) &= -1\\ (\partial_1^2 v)(x,y) &= 0 & (\partial_2^2 v)(x,y) &= 0,\end{aligned}$$

slik at vi får

$$(\partial_1^2 w)(x,y) = x(\partial_1 \alpha)(x,y) + \alpha(x,y) + y(\partial_1 \beta)(x,y) \tag{1}$$
$$(\partial_2^2 w)(x,y) = -y(\partial_2 \alpha)(x,y) - \alpha(x,y) + x(\partial_2 \beta)(x,y) \tag{2}$$

Fra dette ser vi at vi trenger de partiellderiverte til α og β. Ved hjelp av kjerneregelen og å holde tungen rett i munnen, kan vi beregne disse:

$$\begin{aligned}(\partial_1 \alpha)(x,y) &= (\partial_1^2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_1 u)(x,y) + (\partial_2 \partial_1 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_1 v)(x,y)\\ &= x(\partial_1^2 f)(u(x,y), v(x,y)) + y(\partial_2 \partial_1 f)(u(x,y), v(x,y))\\ (\partial_2 \alpha)(x,y) &= (\partial_1^2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_2 u)(x,y) + (\partial_2 \partial_1 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_2 v)(x,y)\\ &= -y(\partial_1^2 f)(u(x,y), v(x,y)) + x(\partial_2 \partial_1 f)(u(x,y), v(x,y))\\ (\partial_1 \beta)(x,y) &= (\partial_1 \partial_2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_1 u)(x,y) + (\partial_2^2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_1 v)(x,y)\\ &= x(\partial_1 \partial_2 f)(u(x,y), v(x,y)) + y(\partial_2^2 f)(u(x,y), v(x,y))\\ (\partial_2 \beta)(x,y) &= (\partial_1 \partial_2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_2 u)(x,y) + (\partial_2^2 f)(u(x,y), v(x,y)) \cdot (\partial_2 v)(x,y)\\ &= -y(\partial_1 \partial_2 f)(u(x,y), v(x,y)) + x(\partial_2^2 f)(u(x,y), v(x,y)).\end{aligned}$$

Vi setter inn disse i ligning (1) og (2) og finner summen

$$\begin{aligned}(\partial_1^2 w)(x,y) + (\partial_2^2 w)(x,y) &= x(\partial_1\alpha)(x,y) + y(\partial_1\beta)(x,y) - y(\partial_2\alpha)(x,y) - \alpha(x,y) + x(\partial_2\beta)(x,y)\\ &= x^2(\partial_1^2 f)(u(x,y),v(x,y)) + xy(\partial_2\partial_1 f)(u(x,y),v(x,y))\\ &\quad + yx(\partial_1\partial_2 f)(u(x,y),v(x,y)) + y^2(\partial_2^2 f)(u(x,y),v(x,y))\\ &\quad + y^2(\partial_1^2 f)(u(x,y),v(x,y)) - xy(\partial_2\partial_1 f)(u(x,y),v(x,y))\\ &\quad - xy(\partial_1\partial_2 f)(u(x,y),v(x,y)) + x^2(\partial_2^2 f)(u(x,y),v(x,y)).\end{aligned}$$

Vi ser at leddene med kryssderiverte kansellerer, slik at vi sitter igjen med

$$(\partial_1^2 w)(x,y) + (\partial_2^2 w)(x,y) = (x^2+y^2)\left((\partial_1^2 f)(u(x,y),v(x,y)) + (\partial_2^2 f)(u(x,y),v(x,y))\right).$$

Siden vi har fått opplyst at f oppfyller Laplaces ligning, vet vi at $\partial_1^2 f + \partial_2^2 f = 0$, så parentesen i ligningen over er null. Dermed er

$$\partial_1^2 w + \partial_2^2 w = 0,$$

så w oppfyller Laplaces ligning.

12.5.9 Det er klart at $\nabla f(x,y) = (2y, 2x-6y)$, så

$$\nabla f(5,5) = (10,-20).$$

En *enhetsvektor* parallell med $\mathbf{A}$ er

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}(4,3) = \frac{1}{5}(4,3).$$

Følgelig er den retningsderiverte vi søker

$$\mathrm{D}_{\mathbf{u}} f(5,5) = (\nabla f(5,5))\cdot\mathbf{u} = -4.$$

12.5.25 Kurven $xy=-4$ er en hyperbel som vist i figur 1.

Det er klart at tangenten må ha stigningstall 1 på grunn av symmetrien.[4] En ligning for tangenten er derfor $y = x-4$.

12.5.27 Vi søker en vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ slik at $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(3,2) = 0$. Det er klart at $\nabla f(x,y) = (y, x+2y)$, så

$$\nabla f(3,2) = (2,7).$$

Vi har derfor

$$0 = \mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(3,2) = (\nabla f(3,2))\cdot\mathbf{v} = 2v_1 + 7v_2,$$

som gir at $v_1 = -7v_2/2$. Med andre ord er den retningsderiverte til f i $(3,2)$ null i retning av

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{7}{2}v_2, v_2\right)$$

(for enhver $v_2 \neq 0$).

12.6.5

a) La $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x,y,z) = \cos\pi x - x^2 y + e^{xz} + yz - 4.$$

Da er

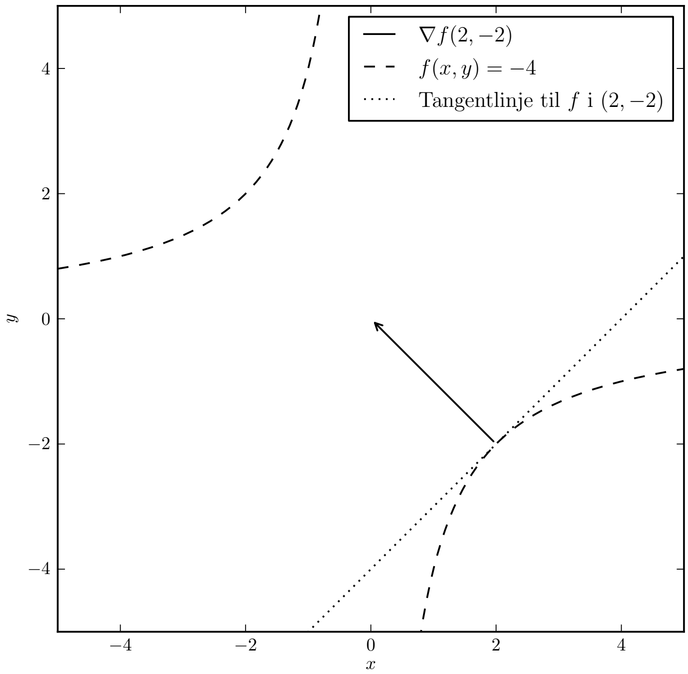
$$\nabla f(x,y,z) = (-\pi\sin\pi x - 2xy + ze^{xz}, -x^2+z, xe^{xz}+y)$$

slik at $\nabla f(0,1,2) = (2,2,1)$. En ligning for det aktuelle tangentplanet er dermed, per ligning (2) på side 748,

$$2x + 2(y-1) + z - 2 = 0,$$

eller enklere: $z = -2x - 2y + 4$.

[4] Dette kan også kontrolleres ved å beregne $\nabla f(2,-2)$, som må stå normalt på tangenten.



Figur 1: Tilhørende oppgave 12.5.25.

b) En parametrisering $\mathbf{r}$ for den aktuelle normallinjen er dermed, per ligning (3) på side 748,

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 1+2t, 2+t).$$

$\boxed{\text{12.6.35}}$ De partiellderiverte til f er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 = f(0,0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

slik at lineariseringen L i $(0,0)$ er gitt ved

$$L(x,y) = 1 + 1(x-0) + 0(y-0) = x+1.$$

For å finne en feilskranke for lineariseringen beregner vi de dobbelderiverte til f, altså

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -e^x \sin y.$$

En åpenbar (global) beskrankning på cosinus er 1. Eksponensialfunksjonen er monotont voksende, og siden $e^{0,1} \approx 1{,}105$, er for eksempel 1,11 en grei beskrankning av den på R. En beskrankning på absoluttverdien til alle de annenordens partiellderiverte på R er derfor $M = 1{,}11$. Resultatet øverst på side 752 gir oss derfor en skranke for feilen E i lineaseringen:

$$E(x,y) \leq \frac{1{,}11}{2}(|x-0| + |y-0|)^2 = 0{,}555(|x| + |y|)^2.$$

Feilen er dermed størst i hjørnene til R, altså når $|x| = |y| = 0{,}1$. Her er feilen begrenset av 0,022, som ses ved innsetting av hjørnepunktene i forrige ligning.

12.6.51 La $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ (ja, vi har her å gjøre med en funksjon av *fire* variabler, men alt vi har lært for to og tre gjelder fremdeles) være gitt ved

$$f(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Vi beregner

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b,c,d) = d \qquad \frac{\partial f}{\partial b}(a,b,c,d) = -c$$
$$\frac{\partial f}{\partial c}(a,b,c,d) = -b \qquad \frac{\partial f}{\partial d}(a,b,c,d) = a.$$

Det er oppgitt at $|a|$ er mye større enn $|b|$, $|c|$ og $|d|$, så vi ser at den retningsderiverte til f i retning av fjerde koordinat[5] er størst. Følgelig er $f(a,b,c,d)$ mest sensitiv for endringer i d.

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en på `https://wiki.math.ntnu.no/tma4105/2013v/gml_eks`. Der er kommet forespørsler som at disse legges ved i selve løsningsforslagene, men dessverre er ofte de gamle LaTeX-filene gått tapt.

Maple-oppgaver

Forslag til konkret Maple-kode finnes på `http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4105/2013v/felles/lf/7/lf7-maple.pdf` og `http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4105/2013v/felles/lf/7/lf7-maple.mw`. Under følger løsningsforslag de matematiske delene av oppgavene.

Maple 3 Retningsvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ definerer det vertikale planet $x = -y$.

[5] "d-aksen", om du vil.