TMA4105 Matematikk 2, øving 8, vår 2012

Løsningsforslag

Oppgaver fra læreboken

12.7.24 Vi finner ekstremalverdier. Vi har

$$\begin{gathered}\nabla f(x,y) = \mathbf{0}\\ (6x^2 - 18x, 6y^2 + 6y - 12) = (0,0),\end{gathered}$$

som gir $x = 0$ og $x = 3$, $y = 1$ og $y = -2$. Ekstremalverdipunktene vil da være $(0,-2)$, $(0,1)$, $(3,-2)$, og $(3,1)$. For å klassifisere punktene bruker vi andrederiverttesten. Vi har at $f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 36(2x-3)(2y+1)$ som gir

$$\begin{aligned}(0,-2):&\quad 36(-3)(-3) > 0 \text{ lokalt maksimum},\\ (0,1):&\quad 36(-3)(5) < 0 \text{ sadelpunkt},\\ (3,-2):&\quad 36(3)(-3) < 0 \text{ sadelpunkt},\\ (3,1):&\quad 36(3)(5) > 0 \text{ lokalt minimum}.\end{aligned}$$

12.7.31 Vi har

$$\nabla f(x,y) = (4x-4, 2y-4).$$

Vi finner først eventuelle indre kritiske punkter ved å løse $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$. Dette gir at $x = 1$, $y = 2$, som faktisk er på randen, så f har altså ingen kritiske punkter i det indre av sitt definisjonsområde. Siden definisjonmrådet til f ikke er åpent, må vi sjekke randen. Langs $x = 0$ er

$$f(0,y) = y^2 - 4y + 1,$$

Dette definerer en énvariabelfunksjon $[0,2] \to \mathbb{R}$ som har kritisk punkt i $y = 2$ ved vanlig derivert-test (fra Matematikk 1). Verdien her er $f(0,2) = -3$. Siden heller ikke dennes definisjonmråde ($[0,2]$) er åpent, må vi også sjekke det andre randpunktet, 0, så $f(0,0) = 1$. Det siste av definisjonområdet til f som må undersøkes er linjen gitt av $y = 2x$. Her er

$$f(x,2x) = 2x^2 - 4x + 4x^2 - 8x + 1 = 6x^2 - 12x + 1.$$

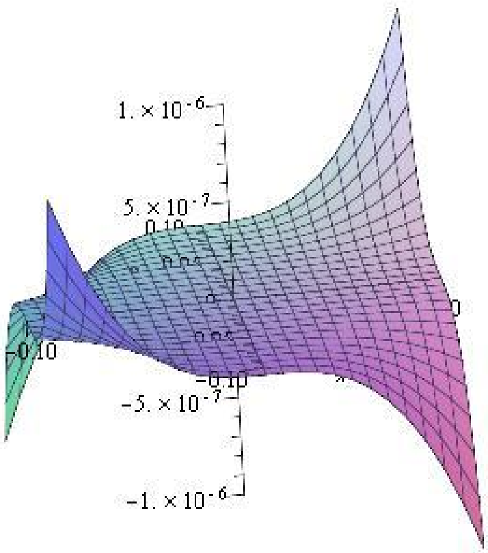
Dette definerer nok en gang en énvariabelfunksjon $[0,1] \to \mathbb{R}$. Ved vanlig derivert-test har denne kritisk punkt i $x = 1$. Her er $f(1,2) = 6 - 12 + 1 = -5$.

Vi konkluderer med at f har globalt minimum i $(1,2)$, med verdi -5, og globalt maksimum i $(0,0)$, med verdi 1.

12.7.45 Vi finner et moteksempel til påstanden om at det må være et lokalt maksimum eller minimum. La $f(x,y) = x^3y^3$ og $(a,b) = (0,0)$. Da har vi at $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, men funksjonen har et sadelpunkt i $(0,0)$. Se figur .

12.7.46 Vi har et kritisk punkt (a,b), og fortegnet til $f_{xx}(a,b)$ er ulikt fortegnet til $f_{yy}(a,b)$. Legg merke til at siden de andrederiverte er kontinuerlig vil $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ og vi kan bruke andrederiverttesten. Ulikt fortegn gir at $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$, og siden $-f_{xy}(a,b)^2 \le 0$, vil $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$ og det kritiske punktet er et sadelpunkt.

12.8.7



Figur 1: Funksjonen har verken lokalt maksimum eller lokalt minimum i origo.

a) La $f(x, y) = x + y$ og $g(x, y) = xy - 16$. Vi er da ute etter å minimere f under betingelsen $g(x, y) = 0$. Lagranges multiplikatormetode gir

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ (1, 1) &= \lambda(y, x), \end{aligned}$$

hvis løsning er $y = x$. Altså er $x^2 = 16$, og $x = \pm 4$. Vi er kun ute etter positive x og y, så $(4, 4)$ er det eneste aktuelle punktet. Her er verdien til funksjonen $f(4, 4) = 8$. Dette er åpenbart et globalt minimumspunkt; beveger vi oss ut på armene til hyperbelen øker både x og y.

b) La $f(x, y) = xy$ og $g(x, y) = x + y - 16$. Vi er da ute etter å maksimere f under betingelsen $g(x, y) = 0$. Lagranges multiplikatormetode gir

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ (y, x) &= (\lambda, \lambda), \end{aligned}$$

hvis løsning er $y = x$. Altså er $x = y = 8$. Funksjonsverdien her er $f(8, 8) = 64$. Punktet er åpenbart et globalt maksimum, for går vi ut på linjen gjør betingelsen g at f blir stadig mer negativ.

12.8.11 Vi ser at det største arealet må være når hjørnene til rektangelet ligger på ellipsen. Da er rektangelet nødt til å være symmetrisk om både x- og y-aksen. Det vil si at rektangelet er fullstendig bestemt av et enkelt hjørne i koordinaten (x, y) i første kvadrant. Lengden på den ene siden vil være $2y$ og på den andre $2x$, som gir $A(x, y) = 4xy$. Det vil si at vi skal maksimere $A(x, y)$, med bibetingelse at (x, y) ligger på kurven $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Definer funksjonen $g(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1$ for $x, y \geq 0$. Lagranges multiplikatormetode

$$\begin{aligned} \nabla A &= \lambda \nabla g \\ g &= 0 \end{aligned}$$

gir her

$$\begin{aligned} 4y &= \lambda \frac{1}{8} x, \\ 4x &= \lambda \frac{2}{9} y, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} &= 1, \\ x, y &\geq 0, \end{aligned}$$

som har løsning $\lambda = 24, x = \frac{4}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Dette er et toppunkt da bunnpunktene er gitt ved $x = 0$ eller $y = 0$.

12.8.41 Vi skal finne maksimum av $f(x,y) = x + y$, gitt bibetingelsen $g(x,y) = xy - 16 = 0$. Lagranges multiplikatormetode

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g, \\ g &= 0, \end{aligned}$$

gir da at

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda y, \\ 1 &= \lambda x, \\ xy &= 16. \end{aligned}$$

Systemet har løsning $x = 4, y = 4$ og $x = -4, y = -4$, og f er henholdsvis 8 og -8 i disse punktene. Men dersom vi gjør en substitusjon langs hyperbelen, $y = \frac{16}{x}$ får vi at $f(x, \frac{16}{x}) = x + \frac{16}{x}$ som helt klart ikke har globale maksima eller minima.

12.9.3 Vi bruker Taylors formel

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx 0 + x \cdot 0 + y \cdot 0 + \frac{1}{2}(x^2 \cdot 0 + 2xy + y^2 \cdot 0) + \frac{1}{6}(x^3 \cdot 0 + 3x^2 y \cdot 0 + 3xy^2 \cdot 0 + y^3 \cdot 0) \\ &\approx yx. \end{aligned}$$

Siden $f(x,y) = g(x)h(y)$ kunne vi funnet (de endimensjonale) Taylorrekkene for g og h og multiplisert dem sammen for samme resultat. Minner om at $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$.

12.9.8 Vi bruker Taylors formel

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx 1 + x \cdot 0 + y \cdot 0 + \frac{1}{2}(x^2 \cdot 0 + 0xy + y^2 \cdot 0) + \frac{1}{6}(x^3 \cdot 0 + 3x^2 y \cdot 0 + 3xy^2 \cdot 0 + y^3 \cdot 0) \\ &\approx 1. \end{aligned}$$

Siden $f(x,y) = \cos(r^2)$ kunne vi satt inn $r^2 = x^2 + y^2$ i Taylorrekken for cos og fått samme resultat.

12.9.12 Vi har at $f(x,y) = e^x \sin y$. Ved å multiplisere sammen de endimensjonale rekkene får vi

$$f(x,y) \approx (1 + x + \frac{x^2}{2})(y - \frac{1}{6}y^3) \approx y(1+x).$$

Feilen er gitt ved

$$E(x,y) = \frac{1}{6}\big(x^3 f_{xxx}(cx,cy) + 3x^2 y f_{xxy}(cx,cy) + 3xy^2 f_{xyy}(cx,cy) + y^3 f_{yyy}(cx,cy)\big),$$

med $c \in [0,1]$. For $|x|, |y| \leq 0.1$ har vi at de n'te-deriverte er mindre enn $e^{0{,}1}$ og vi får dermed $E \leq \frac{1}{6}(8 \cdot (0{,}1)^3 e^{0{,}1}) = \frac{4}{3} \cdot (0{,}1)^3 \cdot e^{0{,}1}$.

Eksamensoppgaver

Løsningsforslag til eksamensoppgavene finner en som vanlig på fagets hjemmeside